

Vektoranalysis in verfeinerter Dirac–Notation

Ein Vorschlag zur Reformierung der Vektoranalysis, Zweite Fassung (Version 2.4)

Stefan Pudritzki
Göttingen

4. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Voraussetzungen	5
1.1	Differentiell superkontinuierliche Funktionen	5
1.2	Dreidimensionaler Raum	5
1.3	Logische Grundfunktionen	6
1.3.1	Und	6
1.3.2	Oder	6
1.4	Quantorenlogik	7
1.4.1	Farbige mathematische Sätze	8
1.4.2	Induktionsbeweise	14
1.4.3	Definitionen neuer Konstanten	15
1.4.4	Definitionen neuer Funktionen	15
2	Mengen	17
2.1	Aussageform von Mengen	17
2.2	Mengendefinitionsschema	18
3	Globale Basissymbole	21
3.1	Einheiten	21
3.1.1	Imaginäre Einheit	21
3.1.2	Basiseinheiten	21
3.1.3	Abstrakte Einheiten	22
3.2	Indizes	22
3.2.1	Allgemeine Indizes	22
3.2.2	Komponentenindizes	22
3.2.3	Zyklische Indizes	23

3.2.4	Zeilenindizes und Spaltenindizes	23
3.3	Mengen	23
3.3.1	Mengensymbole	23
3.3.2	Produkt einer Menge mit einer Einheit	24
3.3.3	Längen und Zeiten	24
3.3.4	Skalarfelder	24
3.3.5	Skalarobjekte	25
3.3.6	Skalaroperatoren	25
3.3.7	Objekte	26
3.3.8	Operatoren	27
3.3.9	Beschränkte Funktionen	27
3.3.10	Gerade und ungerade Zahlen	28
3.4	Schreibweisen	28
3.4.1	Objektsymbole	28
3.4.2	Operatorsymbole	29
3.5	Erzeugung neuer Variablen	29
3.5.1	Explizite Deklaration	29
3.5.2	Implizite Deklaration	30
4	Operatoren und Objekte	31
4.1	Unterscheidbarkeit von Operatoren und Objekten	31
4.2	Wirkungsbereiche von Operatoren	32
4.3	Objektaxiome	35
4.4	Operatoraxiome	36
5	Vektoren in Dirac–Notation	39
5.1	Vektortypen	39
5.1.1	Typenlose Vektoren	39
5.1.2	Zeilenvektoren	40
5.1.3	Spaltenvektoren	40
5.1.4	Verknüpfung der Vektortypen	40

5.2	Vektoraddition	41
5.3	Vektoren in Aufzählungslisten	42
5.4	Einheitsvektoren	42
5.5	Ortsvektor	43
5.6	Skalarprodukt (Inneres Produkt)	43
5.7	Dyadisches Produkt	44
5.8	Betragsquadrat	45
5.9	Vektorkomponenten	46
5.10	Matrizen	46
5.11	Einheitsmatrix	47
5.12	Kronecker–Delta	47
5.13	Einheitsteilmatrix	48
5.14	Matrixkomponente	48
5.15	Einkomponentenmatrix	49
5.16	Matrizenaddition	49
5.17	Zeilen und Spalten einer Matrix	49
5.18	Matrizenmultiplikation	50
5.19	Multiplikation von Matrizen mit Vektoren	51
5.20	Diagonalskalarmatrix	51
5.21	Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	52
5.21.1	Antikommutativität	53
5.22	Spur einer Matrix	54
5.23	Skalarmultiplikation mit Vektoren	55
5.24	Skalierte Kreuzproduktmatrizen und Vektoren	56
5.25	Konstellationen	56
5.26	Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen	57
5.27	Basiszerlegung von Vektorproduktmatrizen	60
5.28	Drehmatrizen	61
5.29	Drehmatrizen und Vektorproduktmatrizen	62

6 Spezielle Operatoren 63

6.1	Differentialableitungsoperatoren	63
6.1.1	Globales Differential: Steigungsfunktion	63
6.1.2	Lokales Differential: Örtliche Steigung	64
6.1.3	Taylorentwicklungsoperator	65
6.1.4	Zeitentwicklungsoperator	65
6.1.5	Ortsentwicklungsoperator	66
6.2	Integraloperatoren	66
6.2.1	Lokales Integral: Fläche	66
6.2.2	Globales Integral: Stammfunktion	67
6.2.3	Flächenintegral	68
6.2.4	Volumenintegral	68
6.3	Nabla–Operator	69
6.4	Gradient	69
6.5	Divergenz	70
6.6	Rotation	70
6.7	Laplace–Operator	70
6.8	Hesse–Matrix	71
6.9	Jacobi–Matrix	71
6.10	Antidivergenz	71
6.11	Antigradient	72
6.12	Doppeltes Kreuzprodukt	72
6.13	Nabla in Kugelkoordinaten?	73
6.14	Konstantenmengen	74

Kapitel 1

Voraussetzungen

Dieser Aufsatz setzt zum Verständnis gute Kenntnisse der Vektoranalysis und des Nablakalküls, der Vektor- und Matrizenrechnung sowie der Differential- und Integralrechnung voraus. Außerdem sollten gute Kenntnisse über Quantorenlogik, insbesondere die typographische Zahlentheorie „*Theoria Numerorum Typographica*“ (TNT) sowie Grundkenntnisse über die bisher übliche Benutzung von Dirac-Vektoren vorhanden sein.

Aus meinem Aufsatz „*Differentiell superkontinuierliche Funktionenklassen*“ vom 20. April 2010 wird der selbst definierte Begriff einer differentiell superkontinuierlichen Funktion übernommen:

[http://www.stefanpudritzki.de/SP_Dokumente/
Differentiell-Superkontinuierliche-Funktionen.pdf](http://www.stefanpudritzki.de/SP_Dokumente/Differentiell-Superkontinuierliche-Funktionen.pdf)

1.1 Differentiell superkontinuierliche Funktionen

dsFct-Def

(1.1)

Eine Funktion $f(x)$ soll „*differentiell superkontinuierlich in x* “ heißen, wenn sie in jedem Punkt x_0 aus der Menge aller reellen Zahlen als Definitionsbereich beliebig oft nach der Variablen x differenzierbar ist und ohne stetige Fortsetzung und ohne Fallunterscheidung in jedem Punkt einen eindeutigen Funktionswert besitzt.

1.2 Dreidimensionaler Raum

Alle Definitionen beziehen sich auf den dreidimensionalen, orthogonalen, komplexwertigen Raum.

1.3 Logische Grundfunktionen

Für aussagenlogische Beweise können die folgenden tabellarisch zusammengefassten äquivalenten Beziehungen logischer Grundfunktionen sehr nützlich sein:

1.3.1 Und

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \wedge b$	$a \wedge \sim b$	$\sim a \wedge b$	$\sim a \wedge \sim b$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
				$\sim(\sim a \vee \sim b)$	$\sim(a \implies b)$	$\sim(b \implies a)$	$\sim(a \vee b)$

1.3.2 Oder

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \vee b$	$a \vee \sim b$	$\sim a \vee b$	$\sim a \vee \sim b$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
				$\sim(\sim a \wedge \sim b)$	$b \implies a$	$a \implies b$	$\sim(a \wedge b)$

Die aussagenlogisch wichtige Kontrapositionsregel lautet:

$$(a \implies b) \iff (\sim b \implies \sim a)$$

1.4 Quantorenlogik

Für eindeutige Aussagen sind grundsätzlich immer Quantoren notwendig. Wenn wir beispielsweise ein Objekt Δ als Symbol für die Menge aller Dreiecke betrachten und die drei Seitenlängen mit a, b, c bezeichnen, dann kann der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ kein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden. Es handelt sich zunächst nur um eine „*offene Formel*“. Erst die Quantifizierung macht daraus eine „*geschlossene Formel*“ und damit zu einer eindeutigen Aussage:

$$\forall \Delta : a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{falsch}$$

$$\exists \Delta : a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{wahr}$$

Die Quantoren gehören immer auf die linke Seite vor einer offenen Formel. Die manchmal nachlässige Schreibweise des Hintenanstellens wird nicht verwendet. Dies führt dann zu Unklarheiten, wenn mindestens ein Existenzquantor vorhanden ist:

$$\exists y : y = x^2 \text{ für alle } x \quad \text{unklare Aussage!}$$

Unterschiedliche Stellungen unterschiedlicher Quantoren führen zu unterschiedlichen Aussagen:

$$\forall x : \exists y : y = x^2 \quad \text{Deutung 1}$$

$$\exists y : \forall x : y = x^2 \quad \text{Deutung 2}$$

Die Aussage der Deutung 1 ist, dass zu jedem beliebig gewählten x das Quadrat von x eine Lösung y hat. y ist hier von x abhängig. Deutung 1 ist offensichtlich eine wahre Aussage.

In Deutung 2 ist y von x unabhängig. Die Deutung 2 scheint falsch zu sein, da es keine Zahl gibt, die das Quadrat jeder beliebigen Zahl ist. Wenn wir aber im Axiomensystem den Begriff der Funktion hinzunehmen und y als eine Funktion interpretieren, dann kann die Deutung 2 wahr werden.

Angenommen wir hätten die folgende Funktion definiert:

$$\forall x : \text{sqr}(x) = x^2$$

Dann kommen wir mit Hilfe der Existenzregel der Aussagenlogik genau zu der Form der Deutung 2:

$$\exists y : \forall x : y = x^2 \quad \text{Existenzregel}$$

Ist diese Aussage allein nur deshalb wahr, weil wir der Funktion der Quadrate einen expliziten Namen gegeben haben oder weil wir den Begriff der Funktion als quantifizierbares Objekt zugelassen haben? Meines Erachtens trifft Letzteres zu.

Es werden alle Regeln der typographischen Zahlentheorie „*Theoria Numerorum Typographica*“ (TNT) für Äquivalenzumformungen der Aussagen verwendet. Die Phantasieebenen werden, abweichend vom TNT-System, durch Gliederungen der Zeilennumerierung mit Gliederungspunkten verwirklicht.

1.4.1 Farbige mathematische Sätze

Die unterschiedlichen Gültigkeitsbereiche der Aussagen werden zusätzlich farblich gekennzeichnet:

<i>A</i>	Axiom, globale Voraussetzung, Definition	RGB = (0.000, 0.500, 1.000)
<i>B</i>	allgemeingültiger abgeleiteter Satz	RGB = (0.000, 0.750, 0.000)
<i>C</i>	Spezialfall unter den Voraussetzungen einer Phantasie	RGB = (0.750, 0.000, 0.750)
<i>D</i>	Zitat oder verworfener konventioneller Satz	RGB = (0.750, 0.000, 0.000)
<i>E</i>	Erläuterung, kein abgeleiteter Satz, Metadiskussion	RGB = (1.000, 1.000, 1.000)

Die Farbwerte sind so gewählt, dass sowohl bei schwarzem als auch bei weißem Hintergrund die farbigen Formeln gut lesbar sind.

Gegeben sei beispielsweise wie oben *B* ein abgeleiteter Satz:

$$(1) \quad B \quad \text{allgemeiner Satz}$$

Wir machen eine spezielle Voraussetzung, die uns in eine Phantasieebene hineinbringt:

- | | | |
|-------|--------------|--|
| (1.1) | C | Voraussetzung, Phantasie:
zusätzliche Gliederungs-
tiefe der Zeilennummern |
| (1.2) | B | Übernahme der Zeile 1 aus
nächsthöherer Ebene nach
der Übernahmeregel |
| (1.3) | $C \wedge B$ | Verbindungsregel für Zei-
len 1.1 und 1.2 |

Mit Hilfe der Phantasieregel kann der folgende allgemeingültige Satz erzeugt werden:

$$(2) \quad C \implies C \wedge B \quad \text{Phantasieregel}$$

In jeder Phanasieebene wird das dunkle Magenta zur farblichen Kennzeichnung verwendet. Das dunkle Grün wird ausschließlich in der obersten Bedeutungsebene für allgemein gültige Sätze und der dunkle türkis–blaue Farbton für Axiome verwendet.

Nach den TNT–Regeln eröffnet jede Voraussetzung eine neue Phantasieebene. Das TNT–System erlaubt nur genau eine Voraussetzung in der ersten Zeile einer Phantasieebene. Wenn mehrere Voraussetzungen gemacht werden sollen, können diese aufgrund der Verbindungsregel mit dem logischen UND verknüpft werden und können so formal als eine Voraussetzung gelten, die dann wieder mit der Trennungsregel in einzelne Aussagen zerlegt werden kann:

- | | | |
|-------|-------------------------------|---------------------------------|
| (2.1) | $C_1 \wedge (C_2 \wedge C_3)$ | Voraussetzung 2.1 |
| (2.2) | $C_2 \wedge C_3$ | Trennungsregel für Zeile
2.1 |
| (2.3) | C_1 | Trennungsregel für Zeile
2.1 |
| (2.4) | C_2 | Trennungsregel für Zeile
2.2 |
| (2.5) | C_3 | Trennungsregel für Zeile
2.2 |

Um dies etwas abzukürzen, sei es erlaubt, in den allerersten Zeilen einer neuen Phantasieebene mehrere Voraussetzungen zu nennen. Ein horizontaler Trennstrich trennt die Liste der Voraussetzungen von den nachfolgenden Ableitungen. Nach jedem Gliederungspunkt seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 99 für Voraussetzungen reserviert. Jeder abgeleitete Satz einer Phantasie soll erst mit der Zahl 100 beginnen:

(3.1)	C_1	Voraussetzung 3.1
(3.2)	C_2	Voraussetzung 3.2
(3.3)	C_3	Voraussetzung 3.3
<hr/>		
(3.100)	B	Übernahme aus nächsthöherer Ebene, Zeile 1 (Übernahmeregel)
(3.101)	$B \wedge C_2$	Verbindungsregel für Zei- len 3.2 und 3.100

Wenn zwei Phantasien nacheinanderfolgend aufgeschrieben werden, ohne dass in der nächst höheren Logikebene ein Satz aufgeschrieben wurde, so ist die Zeilennummer für diese Ebene um 1 zu erhöhen. In dem obigen Beispiel ist also die Zeilennummer vor dem Gliederungspunkt von 2 auf 3 erhöht worden.

Bei der Anwendung der Phantasieregel müssen dann allerdings alle Voraussetzungen per Verbindungsregel zusammengefügt werden:

$$(4) \quad C_1 \wedge (C_2 \wedge C_3) \implies B \wedge C_2 \quad \text{Phantasieregel}$$

In den meisten Fällen dürfte es ausreichen, genau eine Phantasieebene zu benutzen. Sollten doch einmal mehrere Phantasieebenen notwendig sein, so werden diese durch die Gliederung der Zeilennummer mit jeweils einem weiteren Punkt gekennzeichnet. Jede Phantasieebene erhält einen zusätzlichen Gliederungspunkt in der Zeilennummer derjenigen Zeile, die unmittelbar vor der Phantasie liegt. Zur besseren optischen Trennung sollte jede Phantasie in einem eigenen Absatz aufgeschrieben werden:

$$(5) \quad B_1 \quad \text{allgemeiner Satz}$$

$$(6) \quad B_2 \quad \text{allgemeiner Satz}$$

(6.1)	C_1	Voraussetzung 6.1 (Phantasieebene 1)
(6.2)	C_2	Voraussetzung 6.2 (Phantasieebene 1)
<hr/>		
(6.100)	$C_1 \wedge C_2$	Verbindungsregel für Zei- len 6.1 und 6.2

(6.100.1)	D_1	Voraussetzung 6.100.1 (Phantasieebene 2)
(6.100.100)	$C_1 \wedge C_2$	Übernahme der Zeile 6.100
(6.100.101)	$D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2)$	Verbindungsregel für Zei- len 6.100.1 und 6.100.100

$$(6.101) \quad D_1 \implies D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2) \quad \text{Phantasieregel}$$

(6.101.1)	D_1	Voraussetzung 6.101.1 (Phantasieebene 2)
(6.101.100)	$D_1 \implies D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2)$	Übernahme der Zeile 6.101
(6.101.101)	$D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2)$	Abtrennungsregel für Zei- len 6.101.1 und 6.101.100
(6.101.102)	$C_1 \wedge C_2$	Trennungsregel für Zeile 6.101.101
(6.101.103)	D_1	Trennungsregel für Zeile 6.101.101

$$(6.102) \quad D_1 \implies D_1 \quad \text{Phantasieregel}$$

$$(6.103) \quad D_1 \vee \sim D_1 \quad \text{Oder-Tabelle [\(1.3.2\)](#)}$$

$$(7) \quad C_1 \wedge C_2 \implies D_1 \vee \sim D_1 \quad \text{Phantasieregel für die Zei-
len 6.1, 6.2 und 6.103}$$

Die Phantasien, die in den Zeilen 6.100.1 und 6.101.1 beginnen, befinden sich zwar auf der selben Phantasieebene 2, sie sind aber unabhängig voneinander.

Für Verweise auf Axiome und auf bereits abgeleitete Gleichungen und auf mehrzeilige Ableitungsabsätze werden zusätzlich jeweils ein symbolischer Kurzname und eine Nummer verwendet, die in die erste Zeile eines Ableitungsabsatzes gesetzt werden:

C1C2-Ph

(1.2)

(7.1)	C_1	Voraussetzung 7.1
(7.2)	C_2	Voraussetzung 7.2
<hr/>		
(7.100)	$C_1 \wedge C_2$	Verbindungsregel für Zeilen 7.1 und 7.2
(7.101)	$C_1 \wedge C_2 \implies D_1 \vee \sim D_1$	Übernahme der Zeile 7
(7.102)	$D_1 \vee \sim D_1$	Abtrennungsregel für Zeilen 7.100 und 7.101

Die symbolischen Namen können in einem Textsatzsystem wie z.B. TeX bzw. LaTeX zur automatischen Erzeugung der Referenznummern verwendet werden. Durch die Verwendung der symbolischen Namen ist es möglich, die Zeilennummerierung wieder von vorne beginnen zu lassen. Bei Verweisen auf bereits abgeleitete Sätze müssen dann sowohl der symbolische Name des Beweisabsatzes als auch die Zeilennummer angegeben werden.

Bei längeren Ableitungen kann ein Beweis auch in mehrere Absätze zerlegt werden. Jeder Absatz bekommt dann einen entsprechenden Namenszusatz in der Form „-Teil{n}“, z.B.:

C1C2-Ph-Teil1

(1.3)

(8.1)	C_1	Voraussetzung 8.1
(8.2)	C_2	Voraussetzung 8.2
<hr/>		

Der Teil1 einer Phantasie könnte ausschließlich aus einer Voraussetzungsliste bestehen. Dennoch sollte immer ein horizontaler Trennstrich zur Abgrenzung zu den nachfolgenden Ableitungen gesetzt werden. Im folgenden Beispiel bekommt der Ableitungsabsatz der Phantasie den Namenszusatz „-Teil2“:

C1C2-Ph-Teil2

(1.4)

(8.100)	$C_1 \wedge C_2$	Verbindungsregel für Zeilen 8.1 und 8.2
(8.101)	$C_1 \wedge C_2 \implies D_1 \vee \sim D_1$	Übernahme der Zeile 7
(8.102)	$D_1 \vee \sim D_1$	Abtrennungsregel für Zeilen 8.100 und 8.101

So kann man in einem Text und vor Allem in Kommentaren weiterer Ableitungen auf eine Ableitung oder einen abgeleiteten Satz verweisen:

$$\boxed{C1C2D1D2-S} \quad (1.5)$$

(9) $C_1 \wedge C_2 \implies D_1 \vee \sim D_1$ Phantasieregel für die Phantasie (1.3) Zeilen 8.1 und 8.2 und (1.4) Zeile 8.102

Einige Ableitungen später kann im Kommentar ein Verweis auf einen abgeleiteten Satz gesetzt werden, der für die Äquivalenzumformung zur aktuellen Zeile benutzt worden ist:

$$\boxed{C1C2D1D2-Abl} \quad (1.6)$$

(999) $\sim (D_1 \vee \sim D_1) \implies \sim (C_1 \wedge C_2)$ Kontraposition zu Satz (1.5)

Die Reservierung der Nummern 1 bis 99 für die Voraussetzungen einer Phantasie erleichtert die spätere Ergänzung der Voraussetzungenliste, ohne die Zeilennummern der nachfolgenden bereits abgeleiteten Sätze innerhalb dieser Phantasie ändern zu müssen.

Für die symbolischen Namen empfehle ich die folgenden Abkürzungen als Suffixe:

- Def Definition durch ein Axiom
- S Satz der obersten Logikebene (genau ein Satz)
- Abl Ableitungsabsatz in der obersten Logikebene mit einem oder mehreren Sätzen
- Ph Voraussetzungen und Sätze einer Phantasie
- Teil{n} Suffixergänzung für die Absätze langer Ableitungen

1.4.2 Induktionsbeweise

Für Induktionsbeweise werden mindestens zwei Phantasieebenen benötigt:

Induktion-Ph-Teil1

(1.7)

(1.1) $\forall n : \forall n_0 : n \geq n_0$ Voraussetzung 1.1:
Anfangsbedingung

Induktion-SubPh-Teil1

(1.8)

(1.100.1) $\forall n : A_n$ Voraussetzung 1.100.1:
Induktionsbehauptung

Induktion-SubPh-Teil2

(1.9)

(1.100.100) A_{n_0} Test des Induktionsanfanges (Spezialisierungsregel)

(1.100.101) $\forall n : A_n$ Induktionsbehauptung,
Voraussetzung 1.100.1

... Ableitungsschritte

(1.100.999) $\forall n : A_{n+1}$ Ergebnis der Ableitungsschritte

Induktion-Ph-Teil2

(1.10)

(1.101) $\forall n : A_n \implies \forall n : A_{n+1}$ Phantasierregel für Zeilen
1.100.1 und 1.100.999

(1.102) $\forall n : A_n$ Induktionsregel

(2) $\forall n : \forall n_0 : n \geq n_0 \implies \forall n : A_n$ Phantasierregel für Zeilen
1.1 und 1.102

1.4.3 Definitionen neuer Konstanten

Eine Definition eines neuen Symbols a , das einen komplizierteren konstanten Ausdruck k ersetzen soll, wird ohne Quantoren vorgenommen, sofern k ausschließlich bereits definierte konstante Ausdrücke enthält:

$$a = k$$

So kann beispielsweise das Symbol $\%$ als neues Zeichen eingeführt werden:

$$\% = \frac{1}{100}$$

1.4.4 Definitionen neuer Funktionen

Wenn eine Funktion $f(x)$ mit einer Variable x einen neuen Namen $g(x)$ bekommen soll, so muss die Variable x an den Allquantor gebunden werden:

$$\forall x : g(x) = f(x)$$

So kann beispielsweise die Exponentialfunktion durch eine Taylorreihe definiert werden:

$$\forall x : \exp(x) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right\}$$

Kapitel 2

Mengen

2.1 Aussageform von Mengen

In diesem Kapitel stelle ich ein allgemeines Schema vor, mit dem neue Mengen anhand einer beliebigen Anzahl von Axiomen mit beliebig vielen Aussagevariablen definiert werden können. Die bisher gebräuchliche Schreibweise der Aussageform von Mengen

$$\{x \mid F(x)\} \quad \text{„Die Menge aller } x, \text{ für die } F(x) \text{ gilt“}$$

erlaubt keine Mengendefinitionen mit mehreren Aussagevariablen mit unterschiedlichen Quantoren. Deshalb modifizieren wir die Aussageform von Mengen in Richtung Quantorenschreibweise. Wir betrachten dazu zunächst ein einfaches Beispiel:

Eine Menge \mathbb{X} soll mit Hilfe einer offenen Formel $F(x)$ mit der lokal freien Variable x mit Hilfe von Quantorenlogik definiert werden:

$$\mathbb{X} = \{ \forall x : F(x) \}$$

\mathbb{X} ist diejenige Menge, in der für alle x die Formel $F(x)$ gilt.

Die Aussage, dass y ein Element der Menge \mathbb{X} ist, soll äquivalent zu der Aussage der geschlossenen mengendefinierenden Formel bezogen auf y sein:

$$y \in \mathbb{X} \iff \forall y : F(y)$$

Die Variable x ist eine lokale, innerhalb der Menge \mathbb{X} gebundene Variable. Erst die Voraussetzung, dass eine Variable y Element der Menge \mathbb{X} ist, erzeugt die geschlossene Formel mit der Variablen y als Folgerung. Umgekehrt gilt bei Voraussetzung der geschlossenen Formel mit der Variable y die Folgerung, dass y ein Element der Menge \mathbb{X} ist.

Beispiel 1:

$$\mathbb{X} = \{ \forall x : x \bmod 3 = 0 \}$$

Die Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen

Dann gilt die folgende Äquivalenz:

$$y \in \mathbb{X} \iff \forall y : y \bmod 3 = 0$$

Beispiel 2:

Sei $A(x_1, x_2, x_3)$ eine geschlossene Formel für die drei Variablen x_1, x_2, x_3 derselben mathematischen Struktur und sei

$$\mathbb{X} = \{A(x_1, x_2, x_3)\}$$

Wenn beispielsweise nur zwei Symbole als Elemente von \mathbb{X} erklärt werden, dann gilt die Aussage A für alle Permutationen und Wiederholungen dieser beiden Symbole in der Parameterliste von A :

$$\{y_1, y_2\} \subset \mathbb{X}$$

$$\iff$$

$$A(y_1, y_1, y_1) \wedge A(y_1, y_1, y_2) \wedge A(y_1, y_2, y_1) \wedge A(y_1, y_2, y_2)$$

$$\wedge A(y_2, y_1, y_1) \wedge A(y_2, y_1, y_2) \wedge A(y_2, y_2, y_1) \wedge A(y_2, y_2, y_2)$$

2.2 Mengendefinitionsschema

Mengen können durch eine Liste von geschlossenen Formeln als Axiome mit jeweils unterschiedlicher Anzahl der Variablen definiert werden. Um ein allgemeines Mengendefinitionsschema zu formulieren, seien $A_{j,k}(x_1, \dots, x_k)$ geschlossene Formeln unter Verwendung der offenen Formeln $F_{j,k}(x_1, \dots, x_k)$ mit der Zeilennummer j und der Anzahl k der Variablen derselben mathematischen Struktur einer rechteckigen $M \times N$ -Matrix. Außerdem sei Q eine geordnete Liste von sonstigen Quantoren aus der Menge $\{ \forall, \exists, \sim \forall, \sim \exists \}$, die aber mit einem anderen Quantor als dem Allquantor beginnt, oder eine leere Liste ist:

$$A_{j,k}(x_1, \dots, x_k) \iff \forall x_1 : \dots \forall x_k : Q : F_{j,k}(x_1, \dots, x_k)$$

Eine Menge \mathbb{X} kann nun mit einer rechteckigen Matrix von geschlossenen Formeln definiert werden:

$$\mathbb{X} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} A_{1,1}(x_1) & \cdots & A_{1,N}(x_1, \dots, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M,1}(x_1) & \cdots & A_{M,N}(x_1, \dots, x_N) \end{array} \right) \right\}$$

Diese Schema deckt allerdings noch nicht alle Formen der Axiome ab. Gegebenenfalls kann die Liste der Axiome noch durch solche ergänzt werden, die mit einem Existenzquantor beginnen, z.B.:

$$\exists x : x^2 = -1$$

Alle Komponenten dieser Aussagenmatrix können als eine Gesamtaussage durch logische UND-Verknüpfung aufgefasst werden. Das entspricht der Verbindungsregel bzw. der Trennungsregel der TNT-Aussagenlogik.

Für den Fall, dass die Zahl der deklarierten Elemente einer Menge \mathbb{X} kleiner ist, als die maximale Zahl der freien Variablen der Menge \mathbb{X} definierenden Axiome, gelten alle Axiome der Menge \mathbb{X} für die deklarierten Variablen, ggf. unter allen Permutationen und Wiederholungen dieser Variablen.

Kapitel 3

Globale Basissymbole

In diesem Kapitel werden alle Basissymbole axiomatisch definiert.

3.1 Einheiten

3.1.1 Imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit i wird in einer impliziten Gleichung definiert:

$$\boxed{\text{i-Def}} \tag{3.1}$$
$$i^2 = -1 \quad \text{imaginäre Einheit}$$

Das Symbol i darf nicht durch einen anderen Ausdruck ersetzt werden. Diese Gleichung ist nicht explizit nach i auflösbar.

3.1.2 Basiseinheiten

Es werden hier zwei Symbole eingeführt, die als Einheiten für die Länge und die Zeit stehen:

$$\boxed{\text{lambda-tau-Def}} \tag{3.2}$$

(1) $\tilde{\lambda}$ Längeneinheit

(2) $\tilde{\tau}$ Zeiteinheit

3.1.3 Abstrakte Einheiten

Jedes aufrechte, nicht kursive Symbol mit Tilde ist eine Einheit:

$$\boxed{\text{u-Def}} \quad (3.3)$$

$\forall u : \tilde{u}$ ist eine Einheit

3.2 Indizes

3.2.1 Allgemeine Indizes

Die folgenden Bezeichnungen sind Basissymbole ganzer Zahlen:

$$\boxed{\text{Index-Def}} \quad (3.4)$$

$\{j, k, l, m, n\} \subset \mathbb{Z}$

3.2.2 Komponentenindizes

Komponentenindizes für die Komponenten dreidimensionaler Vektoren sind eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Das Hatschek-Zeichen generiert aus einem beliebigen Symbol einer natürlichen Zahl ein neues Symbol für einen Komponentenindex:

$$\boxed{\text{KompIdx-Def}} \quad (3.5)$$

$\forall n : \check{n} \in \{1, 2, 3\}$

3.2.3 Zyklische Indizes

Zyklisches Indextripel definieren wir mit dem zusätzlichen Symbol des kleinen Kreises oberhalb eines indizierten Indexes n_j :

$$\boxed{\text{zyklischIdx-Def}} \quad (3.6)$$

$$\forall j : \forall n : (\hat{n}_{j+1}, \hat{n}_{j+2}, \hat{n}_{j+3}) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \wedge \{j \bmod 3\} = 0$$

3.2.4 Zeilenindizes und Spaltenindizes

Zur Definition aller benötigten Matrizen werden eine Zeilenzahl n_R (Index R für das englische Wort „row“) und eine Spaltenzahl n_C (Index C für das englische Wort „column“) definiert, die ausschließlich die Werte 1 und 3 annehmen können:

$$\boxed{\text{NRowNCol-Def}} \quad (3.7)$$

$$\forall n : n_R \in \{1, 3\} \wedge n_C \in \{1, 3\}$$

Mit diesem Axiom werden aus dem vorgegebenen Symbol n die weiteren Symbole n_R und n_C erzeugt.

3.3 Mengen

3.3.1 Mengensymbole

Die Liste der Mengensymbole wird durch einen Zeichensatz mit doppeltem Strich dargestellt:

$$\boxed{\text{Mengensymbole-Def}} \quad (3.8)$$

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{O}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$$

Selbstdefinierte Mengen erhalten die Indexbezeichnung „DV“ als Abkürzung für „Dirac-Vektoren“, um den Buchstabenvorrat frei zu halten.

3.3.2 Produkt einer Menge mit einer Einheit

Das Produkt einer Menge mit einer Einheit soll durch die folgende Mengengleichung definiert werden:

$$\boxed{\text{Xu-Def}} \quad (3.9)$$

$$\forall \mathbb{X}: \mathbb{X} \cdot \tilde{u} = \{\forall y: x \in \mathbb{X} \wedge y = x \cdot \tilde{u}\}$$

3.3.3 Längen und Zeiten

Die Menge der Längen (engl. „*length*“) bzw. der Zeiten (engl. „*time*“) ist die Menge der reellen Zahlen, die mit der Längeneinheit bzw. mit der Zeiteinheit multipliziert wird:

$$\boxed{\text{LT-Def}} \quad (3.10)$$

$$(1) \quad \mathbb{L}_{\text{DV}} = \mathbb{R} \cdot \tilde{\lambda}$$

$$(2) \quad \mathbb{T}_{\text{DV}} = \mathbb{R} \cdot \tilde{\tau}$$

3.3.4 Skalarfelder

Unter Rückgriff auf die Definition der differentiell superkontinuierlichen Funktionen [\(1.1\)](#) definieren wir eine Menge von reellen Funktionen mit drei unabhängigen Längenvariablen, die in jeder Längenvariable differentiell superkontinuierlich sind:

$$\boxed{\text{F-Def}} \quad (3.11)$$

$$\mathbb{F}_{\text{DV}} =$$

{

$$\forall f: \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \wedge f: \mathbb{L}_{\text{DV}}^3 \rightarrow \mathbb{R} \cdot \tilde{u}, \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

$\wedge f$ differentiell superkontinuierlich in allen Variablen x_1, x_2, x_3

$\wedge \tilde{u}$ ist eine beliebige Maßeinheit

}

Dies ist die Menge aller zulässigen skalaren Felder (engl. „field“).

3.3.5 Skalarobjekte

Die Menge der komplexwertigen Skalarobjekte (engl. „scalar“) definieren wir als die Menge aller in der reellen dreidimensionalen Längenvariable \vec{x} differentiell superkontinuierlichen komplexwertigen Funktionen unter Verwendung der Menge der reellwertigen Skalarfelder \mathbb{F}_{DV} nach Definition [\(3.11\)](#):

$$\boxed{\text{S-Def}} \tag{3.12}$$

$$\mathbb{S}_{\text{DV}} = \{ \forall h : \exists f : \exists g : \forall \vec{x} : \{f, g\} \subset \mathbb{F}_{\text{DV}} \wedge h = f + ig \}$$

f und g können auch von \vec{x} unabhängige Konstanten sein, so dass h auch jede konstante komplexe Zahl in \mathbb{C} annehmen kann. Die Menge der Skalare \mathbb{S}_{DV} ist die Menge aller durch differentiell superkontinuierliche Funktionen erzeugten komplexwertigen Funktionen.

3.3.6 Skalaroperatoren

Die Menge der Skalaroperatoren sei die Menge aller Abbildungen (engl. „mapping“), die jedes Skalarobjekt nach Definition [\(3.12\)](#) wieder in die Menge der Skalarobjekte abbildet:

$$\boxed{\text{M-Def}} \tag{3.13}$$

$$\mathbb{M}_{\text{DV}} = \{ \forall x : x : \mathbb{S}_{\text{DV}} \rightarrow \mathbb{S}_{\text{DV}} \}$$

Hier liegt eine doppelte Bedeutung des Doppelpunktes vor, die aber nicht zu Konflikten führen dürfte: Der erste Doppelpunkt gehört zum Allquantor während der zweite Doppelpunkt zur Kennzeichnung des Definitionsbereiches und des Wertebereiches der Abbildung x dient.

3.3.7 Objekte

Alle möglichen Definitionsbereiche und Wertebereiche enthalten komplexwertige Objekte:

$$\boxed{\text{S-NR-NC-Def}} \quad (3.14)$$

$\forall n_R : \forall n_C : \mathbb{S}_{\text{DV}}^{n_R, n_C}$ ist Definitions- oder Wertebereich einer Abbildung s. Indexdefinition [\(3.7\)](#)

Die speziellen komplexwertigen Strukturen werden unter Rückgriff auf die Definition der Skalarobjekte [\(3.12\)](#) vorgnommen:

$$\boxed{\text{Objektstrukuren-Def}} \quad (3.15)$$

- (1) $\mathbb{S}_{\text{DV}}^{1,1} = \{ \forall x : x \in \mathbb{S}_{\text{DV}} \}$ Skalarobjekte
- (2) $\mathbb{S}_{\text{DV}}^{1,3} = \{ \forall (x_1, x_2, x_3) : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{S}_{\text{DV}} \}$ Zeilenvektorobjekte
- (3) $\mathbb{S}_{\text{DV}}^{3,1} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{S}_{\text{DV}} \right\}$ Spaltenvektorobjekte
- (4) $\mathbb{S}_{\text{DV}}^{3,3} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} : \{x_{1,1}, \dots, x_{3,3}\} \subset \mathbb{S}_{\text{DV}} \right\}$ Matrixobjekte

3.3.8 Operatoren

Die Operatorräume definieren wir allgemein mit der Zeilenzahl n_R und der Spaltenzahl n_C :

$$\boxed{\text{P-NR-NC-Def}} \quad (3.16)$$

$$\forall n_R : \forall n_C : \mathbb{M}_{\text{DV}}^{n_R, n_C} \text{ ist Operatorraum s. Indexdefinition (3.7)}$$

Die speziellen Operatorstrukturen werden unter Rückgriff auf die Definition der Skalaroperatoren (3.13) vorgenommen:

$$\boxed{\text{Operatorstrukturen-Def}} \quad (3.17)$$

- (1) $\mathbb{M}_{\text{DV}}^{1,1} = \{ \forall x : x \in \mathbb{M}_{\text{DV}} \}$ Skalaroperatoren
- (2) $\mathbb{M}_{\text{DV}}^{1,3} = \{ \forall (x_1, x_2, x_3) : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{M}_{\text{DV}} \}$ Zeilenvektoroperatoren
- (3) $\mathbb{M}_{\text{DV}}^{3,1} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{M}_{\text{DV}} \right\}$ Spaltenvektoroperatoren
- (4) $\mathbb{M}_{\text{DV}}^{3,3} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} : \{x_{1,1}, \dots, x_{3,3}\} \subset \mathbb{M}_{\text{DV}} \right\}$ Matrixoperatoren

3.3.9 Beschränkte Funktionen

Für die Menge der im Wertebereich von -1 bis +1 beschränkten Funktionen wird das Symbol \mathbb{B} für das englische Wort „*bounded*“ verwendet:

$$\boxed{\text{B-Menge-Def}} \quad (3.18)$$

$$\mathbb{B}_{\text{DV}} = \{ \forall x : x \in \mathbb{F}_{\text{DV}} \wedge -1 \leq x \leq +1 \}$$

Die entsprechenden nur positiven bis +1 beschränkten Funktionen definieren wir zum Einen inklusive Null und zum Anderen exklusive Null:

$$\boxed{\text{BPlus-Menge-Def}} \quad (3.19)$$

$$(1) \quad \mathbb{B}_{0, \text{DV}}^+ = \{\forall x: x \in \mathbb{F}_{\text{DV}} \wedge 0 \leq x \leq +1\}$$

$$(2) \quad \mathbb{B}_{\text{DV}}^+ = \{\forall x: x \in \mathbb{F}_{\text{DV}} \wedge 0 < x \leq +1\}$$

3.3.10 Gerade und ungerade Zahlen

Die Menge der geraden Zahlen (engl. „even“) und die Menge der ungeraden Zahlen (engl. „odd“) seien wie folgt definiert:

$$\boxed{\text{gerade-ungerade-Def}} \quad (3.20)$$

$$(1) \quad \mathbb{E}_{\text{DV}} = \{\forall x: x = 2n \wedge n \in \mathbb{Z}\}$$

$$(2) \quad \mathbb{O}_{\text{DV}} = \{\forall x: x = 2n + 1 \wedge n \in \mathbb{Z}\}$$

3.4 Schreibweisen

3.4.1 Objektsymbole

Der Symbolvorrat der Objekte erstreckt sich über alle kursiven lateinischen und griechischen Kleinbuchstaben und Großbuchstaben ohne Δ :

$$\boxed{\text{Objektsymbole-Def}} \quad (3.21)$$

$$(1) \quad \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} \subset \mathbb{S}_{\text{DV}}$$

$$(2) \quad \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\} \subset \mathbb{S}_{\text{DV}}$$

$$(3) \quad \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \vartheta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \varpi, \rho, \varrho, \sigma, \varsigma, \tau, \upsilon, \phi, \varphi, \chi, \psi, \omega\} \subset \mathbb{S}_{\text{DV}}$$

$$(4) \quad \{\Gamma, \Theta, \Lambda, \Sigma, \Upsilon, \Phi, \Psi, \Omega\} \subset \mathbb{S}_{\text{DV}}$$

Der griechische Großbuchstabe Δ wird zu der Liste der Operatorsymbole gezählt:

3.4.2 Operatorsymbole

Der Zeichenvorrat der Operatoren erstreckt sich auf alle kalligraphischen Großbuchstaben zuzüglich einiger teilweise bereits definierter Sondersymbole:

$$\boxed{\text{Operatorsymbole-Def}} \quad (3.22)$$

- (1) $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\} \subset \mathbb{M}_{\text{DV}}$
- (2) $\left\{ \partial_x, \frac{d}{dx}, \int dx, \lim, \nabla, \Delta, \text{div}, \text{grad}, \text{rot} \right\}$ spezielle Operatoren

Für viele Definitionen ist es praktisch, ein Symbol zu verwenden, das entweder als Objekt oder als Operator interpretiert werden kann. Dazu verwenden wir das Zirkumflexzeichen als Zusatz zu einem Buchstaben:

$$\boxed{\text{Objekt-Operator-Def}} \quad (3.23)$$

$$\forall a: (\hat{a} \in \mathbb{S}_{\text{DV}} \wedge \hat{a} \notin \mathbb{M}_{\text{DV}}) \vee (\hat{a} \notin \mathbb{S}_{\text{DV}} \wedge \hat{a} \in \mathbb{M}_{\text{DV}})$$

Diese Definition kann auch als eine Antivalenz formuliert werden:

$$\boxed{\text{Objekt-Operator-S}} \quad (3.24)$$

$$\forall a: \sim (\hat{a} \in \mathbb{S}_{\text{DV}} \iff \hat{a} \in \mathbb{M}_{\text{DV}})$$

3.5 Erzeugung neuer Variablen

3.5.1 Explizite Deklaration

Für jedes neue Symbol a , das eingeführt werden soll, ist als erstes ein Axiom erforderlich, das festlegt, in welcher Menge sich a befindet, z.B.:

$$\forall a: a \in \mathbb{X}$$

3.5.2 Implizite Deklaration

Die implizite Erweiterung der Symbolliste einer Menge \mathbb{X} geschieht zum einen durch Anfügen eines hochgestellten Striches oder durch Anfügen eines tiefgestellten Indexes an ein bereits definiertes Basissymbol:

Symbolerweiterung-Def	(3.25)
-----------------------	--------

$$(1) \quad \forall \mathbb{X}: \forall a: a \in \mathbb{X} \implies a' \in \mathbb{X}$$

$$(2) \quad \forall \mathbb{X}: \forall a: \forall j: a \in \mathbb{X} \implies a_j \in \mathbb{X}$$

Ein Axiom zur Deklaration der Zugehörigkeit zu einer Menge ist nach diesen Axiomen nicht mehr erforderlich. So sind beispielsweise folgende Mengenzugehörigkeiten ableitbar:

Symbol-Beispiele-Abl	(3.26)
----------------------	--------

$$(3) \quad n_{42} \in \mathbb{Z} \quad \text{Definition (3.4) und Axiom (3.25) Zeile 2}$$

$$(4) \quad n_{42,123,7} \in \mathbb{Z} \quad \text{Definition (3.4) und Axiom (3.25) Zeile 2, dreifache Anwendung}$$

$$(5) \quad \mathcal{X}'''' \in \mathbb{M}_{\text{DV}} \quad \text{Definition (3.22) Zeile 1 und Axiom (3.25) Zeile 1, fünffache Anwendung}$$

Kapitel 4

Operatoren und Objekte

Ein Operator soll ausschließlich auf den rechts von ihm befindenden Term wirken. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, soll es keine Wirkung nach links geben. Die einzigen Ausnahmen sind Operatoren, die als Exponent zu einem Term geschrieben werden: das Potenzieren, das Transponieren, das komplexe Konjugieren und das Adjungieren. Diese Operatoren wirken nach links unten.

Operatoren müssen selbst differentiell superkontinuierlich sein; das soll heißen, dass sie so beschaffen sein müssen, dass bei Anwendung auf ein differentiell superkontinuierliches Objekt keine nicht differentiell superkontinuierlichen Objekte produziert werden können, z.B. bei Skalaroperatoren:

$$\boxed{\text{Abgeschlossenheit-Def}} \quad (4.1)$$

$$\forall \mathcal{P} : \forall f : \mathcal{P} \in \mathbb{M}_{DV} \wedge f \in \mathbb{S}_{DV} \implies \{\mathcal{P}f\} \in \mathbb{S}_{DV}$$

4.1 Unterscheidbarkeit von Operatoren und Objekten

Kein mathematischer Skalarterm ist gleichzeitig Operator und Objekt:

$$\boxed{\text{Op-Obj-Unterschied-S}} \quad (4.2)$$

$$\mathbb{S}_{DV} \cap \mathbb{M}_{DV} = \emptyset \quad \text{s. Definition [\(3.23\)](#)}$$

4.2 Wirkungsbereiche von Operatoren

Die nachfolgende Diskussion bezieht sich auf Skalarobjekte und Skalaroperatoren. Entsprechendes gilt dann für die Komponenten von Vektoren und Matrizen.

Die geschweiften Klammern $\{$ und $\}$ sollen dazu benutzt werden, um die Wirkungsbereiche der Operatoren genau festzulegen. Eine öffnende Klammer $\{$ zeigt einem Operator der nächst höheren Klammerebene an, dass dieser auf alle Terme innerhalb der unter ihm liegenden Klammerebene wirken soll. Eine schließende Klammer $\}$ begrenzt den Wirkungsbereich eines Operators, der sich innerhalb dieser Klammerebene befindet.

Ein Beispiel mit den Operatoren \mathcal{P}, \mathcal{Q} und den Objekten a, b, c veranschaulicht die Wirkungsweise der geschweiften Klammern:

$$\{\mathcal{P}\{Qa\}b\}c$$

Der Operator \mathcal{Q} wirkt ausschließlich auf das Objekt a . Der Operator \mathcal{P} wirkt auf die Objekte $\{Qa\}$ und b . Keiner der beiden Operatoren wirkt auf c . Ohne geschweifte Klammern hätten wir einen Operator vorliegen. Wir definieren dies in weiteren zwei Axiomen für allgemeine Objekte a , die im Definitionsbereich des Operators \mathcal{P} liegen:

$$\boxed{\text{Op-Klammern-Def}} \quad (4.3)$$

$$(1) \quad \forall \mathcal{P} : \forall a : \mathcal{P}a \in \mathbb{M}_{\text{DV}} \quad \text{Operator}$$

$$(2) \quad \forall \mathcal{P} : \forall a : \{\mathcal{P}a\} \in \mathbb{S}_{\text{DV}} \quad \text{Objekt}$$

Diese Axiome sagen aus, dass die Anwendung eines Operators auf ein Objekt in der Menge der Operatoren bleibt, während der gleiche Ausdruck in geschweiften Klammern zu einem Objekt wird.

Wenn ein Objekt zusätzlich geschweift geklammert wird, hat dies keine Auswirkung auf seine Eigenschaften:

$$\boxed{\text{Obj-mitKlammern-Def}} \quad (4.4)$$

$$\forall a : \{a\} = a$$

Ein weiteres Beispiel zeigt den Unterschied der für Operatoren wirkungsbereichsbegrenzende Klammern und für Operatoren transparente Klammern, falls die Distributivität gilt:

$$(\mathcal{P}a + b)c = \mathcal{P}ac + bc$$

Der Term in den runden operatortransparenten Klammern ist selbst wieder ein Operator, der auf das Objekt c wirkt. Die Symbole a und b müssen in dieser Situation als Multiplikationsoperatoren ($a\cdot$) und ($b\cdot$) aufgefasst werden, da diese Symbole auf das Objekt c treffen. Nach der Anwendung der Distributivitätsregel erhalten wir den Operator $\mathcal{P}ac$ und das Objekt bc .

Anders sieht die folgende Situation aus:

$$\{\mathcal{P}a + b\}c = \{\{\mathcal{P}a\} + b\}c = \{\mathcal{P}a\}c + bc$$

Der Operator \mathcal{P} findet in den wirkungsbereichsbegrenzenden geschweiften Klammern ausschließlich den Operanden a vor. Deshalb wurde in einem ersten Schritt $\mathcal{P}a$ geschweift geklammert und stellt damit ein Objekt dar. Im zweiten Schritt wurde dann die Distributivitätsregel angewendet. Der Gesamtausdruck besteht also aus einer Summe von zwei Objekten.

Aus dem Axiom (4.3) Zeile 2 und dem Axiom (4.4) erhalten wir die Aussage, dass bei doppelten geschweiften Klammern ein Klammerpaar weggelassen werden darf:

$$\boxed{\text{DoppelteKlammern-S}} \tag{4.5}$$

$$\forall \mathcal{P} : \forall a : \{\{\mathcal{P}a\}\} = \{\mathcal{P}a\}$$

Im folgenden Axiom definieren wir, wann geschweifte Klammern gesetzt werden sollen:

$$\boxed{\text{DoppelteKlammernPlus-Def}} \tag{4.6}$$

$$\forall \mathcal{P} : \forall a : \forall b : \{\mathcal{P}a + b\} = \{\{\mathcal{P}a\} + b\}$$

Zwei aufeinanderfolgend geschriebene Operatoren $\mathcal{P}Q$ bedeuten deren verkettete Anwendung. Zwei aufeinanderfolgend geschriebene Skalarobjekte bedeuten deren Produkt.

Für alle Skalarobjekte gelten u.a. die Axiome zur Assoziativität, Kommutativität und Distributivität bezüglich der beiden Verknüpfungen Multiplikation \cdot und Addition $+$. Jedes Skalarobjekt kann im Zusammenhang mit einem entsprechenden Verknüpfungszeichen als Operator aufgefasst werden:

MulOp-AddOp-Def

(4.7)

- (1) $\forall a : (a \cdot) : \mathbb{S}_{DV} \rightarrow \mathbb{S}_{DV}$ Multiplikationsoperator
- (2) $\forall a : (a+) : \mathbb{S}_{DV} \rightarrow \mathbb{S}_{DV}$ Additionsoperator

Die Beziehung der Menge \mathbb{S}_{DV} der Skalarobjekte nach [\(3.12\)](#) zu der Menge \mathbb{M}_{DV} der Skalaroperatoren nach [\(3.13\)](#) wird in den folgenden drei Aussagen zusammengefasst:

MulOp-AddOp-S

(4.8)

- (1) $\forall a : \sim a \in \mathbb{M}_{DV}$ Skalarobjekte sind keine Skalaroperatoren, Def. [\(3.21\)](#), [\(4.2\)](#) u. [\(3.12\)](#)
- (2) $\forall a : (a \cdot) \in \mathbb{M}_{DV}$ Multiplikationsoperatoren sind Skalaroperatoren nach Definitionen [\(4.7\)](#) Zeile 1 und [\(3.13\)](#)
- (3) $\forall a : (a+) \in \mathbb{M}_{DV}$ Additionsoperatoren sind Skalaroperatoren nach Definitionen [\(4.7\)](#) Zeile 2 und [\(3.13\)](#)

4.3 Objektaxiome

Für alle Skalarobjekte gelten die folgenden Axiome:

Obj-Axiome-Def

(4.9)

- | | | |
|------|--|---|
| (1) | $\forall a : \forall b : (a \cdot) b = ab$ | Weglassung des Multiplikationszeichens und der Klammerung |
| (2) | $\forall a : \forall b : (a+) b = a + b$ | Weglassung der Klammerung |
| (3) | $\forall a : \forall b : \forall c : a(b + c) = ab + ac$ | Distributivität |
| (4) | $\forall a : \forall b : \forall c : a(bc) = (ab)c$ | Assoziativität |
| (5) | $\forall a : \forall b : a + b = b + a$ | Kommutativität bzgl. + |
| (6) | $\forall a : \forall b : ab = ba$ | Kommutativität bzgl. · |
| (7) | $\forall a : (0+)a = a$ | neutrales Element bzgl. + |
| (8) | $\forall a : (1 \cdot)a = a$ | neutrales Element bzgl. · |
| (9) | $\forall a : ((-a)+)a = 0$ | inverses Element bzgl. + |
| (10) | $\forall a : \forall b : a - b = ((-b)+)a$ | Subtraktion |
| (11) | $\forall a : a \neq 0 \implies (a^{-1} \cdot)a = 1$ | inverses Element bzgl. · |
| (12) | $\forall a : (0 \cdot)a = 0$ | Nullelement |

4.4 Operatoraxiome

Für alle Skalaroperatoren gelten die folgenden Axiome:

Op-Axiome-Def

(4.10)

- | | | |
|------|--|---|
| (1) | $\forall \mathcal{P} : \forall \mathcal{Q} : \forall \mathcal{R} : \mathcal{P}(\mathcal{Q} + \mathcal{R}) = \mathcal{P}\mathcal{Q} + \mathcal{P}\mathcal{R}$ | Distributivität |
| (2) | $\forall \mathcal{P} : \forall \mathcal{Q} : \forall \mathcal{R} : \mathcal{P}(\mathcal{Q}\mathcal{R}) = (\mathcal{P}\mathcal{Q})\mathcal{R}$ | Assoziativität |
| (3) | $\forall \mathcal{P} : \forall \mathcal{Q} : \mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{Q} + \mathcal{P}$ | Kommutativität bzgl. + |
| (4) | $\forall \mathcal{P} : \mathcal{P} + \mathcal{O} = \mathcal{P}$ | neutrales Element bzgl. +,
Nulloperator |
| (5) | $\forall \mathcal{P} : \mathcal{P} + (-\mathcal{P}) = \mathcal{O}$ | inverses Element bzgl. + |
| (6) | $\forall \mathcal{P} : \forall \mathcal{Q} : \mathcal{P} - \mathcal{Q} = \mathcal{P} + (-\mathcal{Q})$ | Subtraktion |
| (7) | $\forall \mathcal{P} : \forall a : a\mathcal{P} = (a \cdot)\mathcal{P}$ | Skalar und Operator,
s. Def. (4.8) Zeile 2 |
| (8) | $\forall \mathcal{P} : \forall a : \mathcal{P}a = \mathcal{P}(a \cdot)$ | Operator und Skalar,
s. Def. (4.8) Zeile 2 |
| (9) | $\forall \mathcal{P} : (1 \cdot)\mathcal{P} = \mathcal{P}(1 \cdot) = \mathcal{P}$ | Einsoperator |
| (10) | $\forall \mathcal{P} : \mathcal{O}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{O} = \mathcal{O}$ | Nulloperator |

Runde Klammern schränken den Wirkungsbereich von Operatoren nicht ein, d.h. sie sind für Operatoren transparent:

rundeKlammern-Def

(4.11)

$$\forall \mathcal{P} : (\mathcal{P}) = \mathcal{P}$$

Ein Operator ohne Operand in geschweiften Klammern ist ein Nullobjekt:

Null-Op-Def

(4.12)

$$\forall \mathcal{P} : \{\mathcal{P}\} = \mathcal{O}$$

Durch diese formale Unterscheidung zu den geschweiften Klammern ist es möglich, Operatoren zu definieren, die sich aus anderen Operatoren additiv zusammensetzen. In den folgenden zwei Zeilen definieren wir die Abgeschlossenheit der Addition und der Verkettung von zwei Skalaroperatoren:

$$\boxed{\text{Abgeschlossenheit-Operatoren-Def}} \quad (4.13)$$

$$(1) \quad \forall \mathcal{P} : \forall \mathcal{Q} : (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}\mathcal{V}}$$

$$(2) \quad \forall \mathcal{P} : \forall \mathcal{Q} : (\mathcal{P}\mathcal{Q}) \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}\mathcal{V}}$$

Das folgende Axiom legt das Verhalten einer formalen Summe aus einem Skalaroperator und einem Skalarobjekt fest:

$$\boxed{\text{op-plus-obj-Def}} \quad (4.14)$$

$$\forall \mathcal{P} : \forall a : \mathcal{P} + a = \mathcal{P} + (a \cdot)$$

Jedes Skalarobjekt in einer formalen Summe, in der mindestens ein Skalaroperator auftritt, wird zu einem skalaren Multiplikationsoperator.

Kapitel 5

Vektoren in Dirac–Notation

5.1 Vektortypen

Für die nachfolgenden Definitionen werden die Symbole zur Zusammenfassung von Objekten und Operatoren nach Definition [\(3.23\)](#) verwendet.

5.1.1 Typenlose Vektoren

Die Bezeichnungen \vec{a} ist eine typenlose Darstellung eines Vektorobjektes bzw. eines Vektoroperators:

$$\boxed{\text{typenlose-Vektoren-Def}} \quad (5.1)$$

$\forall \hat{a} : \vec{a}$ ist ein typenloses Vektorobjekt bzw. typenloser Vektoroperator

Ein typenloser Vektor ist weder Zeilenvektor noch Spaltenvektor. Die Bezeichnung \vec{a} dient zur Herstellung namentlicher Beziehungen zwischen den nachfolgenden Definitionen von Zeilenvektoren, Spaltenvektoren und Vektorproduktmatrizen.

5.1.2 Zeilenvektoren

$$\boxed{\text{Zeilenvektoren-Def}} \quad (5.2)$$

- (1) $\forall \vec{a} : \sim (\langle \vec{a} | \in \mathbb{S}_{\text{DV}}^{1,3} \iff \langle \vec{a} | \in \mathbb{M}_{\text{DV}}^{1,3})$ Zeilenvektorobjekt bzw. Zeilenvektoroperator
- (2) $\forall \vec{a} : \langle \vec{a} | = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ Komponentendarstellung

5.1.3 Spaltenvektoren

$$\boxed{\text{Spaltenvektoren-Def}} \quad (5.3)$$

- (1) $\forall \vec{a} : \sim (|\vec{a}\rangle \in \mathbb{S}_{\text{DV}}^{3,1} \iff |\vec{a}\rangle \in \mathbb{M}_{\text{DV}}^{3,1})$ Spaltenvektorobjekt bzw. Spaltenvektoroperator
- (2) $\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}$ Komponentendarstellung

5.1.4 Verknüpfung der Vektortypen

Die Zeilenvektoren und die Spaltenvektoren werden durch das Transponieren miteinander in Beziehung gesetzt:

$$\boxed{\text{trpket-trpbra-Def}} \quad (5.4)$$

- (1) $\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle^T = \langle \vec{a} |$ transponierter Spaltenvektor
- (2) $\forall \vec{a} : \langle \vec{a} |^T = |\vec{a}\rangle$ transponierter Zeilenvektor

Diese beiden geschlossenen Formeln definieren für Vektoren die Operation des Transponierens. Bei zweifacher Anwendung des Transponierens erhalten wir jeweils die Identität des ursprünglichen Vektors:

trprpket-Abl

(5.5)

- (1) $\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle^T = \langle \vec{a}|$ transponierter Spaltenvektor (5.4), Zeile 1
- (2) $\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle^{TT} = \langle \vec{a}|^T$ beide Seiten transponieren
- (3) $\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle^{TT} = |\vec{a}\rangle$ transponierter Zeilenvektor (5.4), Zeile 2

und

trprpbra-Abl

(5.6)

- (1) $\forall \vec{a} : \langle \vec{a}|^T = |\vec{a}\rangle$ transponierter Zeilenvektor (5.4), Zeile 2
- (2) $\forall \vec{a} : \langle \vec{a}|^{TT} = |\vec{a}\rangle^T$ beide Seiten transponieren
- (3) $\forall \vec{a} : \langle \vec{a}|^{TT} = \langle \vec{a}|$ transponierter Spaltenvektor (5.4), Zeile 1

5.2 Vektoraddition

Die Addition zweier Vektoren ist nur entweder mit zwei Zeilenvektoren oder mit zwei Spaltenvektoren möglich und wird durch Addition der korrespondierenden Komponenten durchgeführt:

Vektoraddition-Def

(5.7)

(1) $\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \langle \vec{a}| + \langle \vec{b}| = (\hat{a}_1 + \hat{b}_1, \hat{a}_2 + \hat{b}_2, \hat{a}_3 + \hat{b}_3)$ Zeilenvektoraddition

(2) $\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : |\vec{a}\rangle + |\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 + \hat{b}_1 \\ \hat{a}_2 + \hat{b}_2 \\ \hat{a}_3 + \hat{b}_3 \end{pmatrix}$ Spaltenvektoraddition

5.3 Vektoren in Aufzählungslisten

Die Bezeichnung \vec{a} bezieht sich auf eine dreidimensionale Größe, die eine Zeilenvektordarstellung $\langle \vec{a} |$ sowie eine Spaltenvektordarstellung $|\vec{a}\rangle$ hat. Die physikalische Größe \vec{a} hat die Komponenten a_1, a_2, a_3 . Diese typenlose Darstellung \vec{a} ist nur in Aufzählungen, z.B. als Parameterangabe einer Funktion, z.B. $f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots)$, oder an den Quantoren \forall, \exists erlaubt.

Wenn eine Verschiebung einer Funktion oder die Umskalierung eines Argumentes einer Funktion gewünscht ist, müssen zuerst neue Vektoren in Zeilenvektor- oder Spaltenvektordarstellung definiert werden, um diese dann als Argumente in typenloser Schreibweise aufzuzählen, z.B.:

$$(1) \quad \forall \vec{a} : \forall \vec{a}_0 : |\vec{a}'\rangle = |\vec{a}\rangle - |\vec{a}_0\rangle$$

$$(2) \quad \forall \vec{b} : \forall s_0 : |\vec{b}'\rangle = |\vec{b}\rangle s_0$$

Die Funktion f mit Argumentenliste könnte dann wie folgt aussehen: $f(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}, \dots)$

5.4 Einheitsvektoren

Die drei orthogonalen Einheitsvektoren im dreidimensionalen kartesischen Raum haben die folgenden Zeilenvektor- bzw. Spaltenvektordarstellungen:

Einheitsvektoren-Def

(5.8)

$$(1) \quad \langle \vec{e}_1 | = (1, 0, 0) \wedge \langle \vec{e}_2 | = (0, 1, 0) \wedge \langle \vec{e}_3 | = (0, 0, 1)$$

$$(2) \quad |\vec{e}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge |\vec{e}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge |\vec{e}_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.5 Ortsvektor

Der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten wird mit indizierbaren x -Werten definiert:

$$\boxed{\text{Ortsvektor-Def}} \quad (5.9)$$
$$\forall \vec{x}: |\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.6 Skalarprodukt (Inneres Produkt)

Bei der Berechnung des Skalarproduktes werden die Komponenten des Zeilenvektors mit den Komponenten des Spaltenvektors gleicher Indizes ohne komplexe Konjugation multipliziert und summiert:

$$\boxed{\text{Skalarprodukt-Def}} \quad (5.10)$$
$$\forall \vec{a}: \forall \vec{b}: \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 \hat{a}_j \hat{b}_j$$

Der Verzicht auf die komplexe Konjugation des ersten Vektors an dieser Stelle ist eigene Konvention. Sie taucht erst bei der Definition des Betragsquadrates [\(5.14\)](#) auf.

5.7 Dyadisches Produkt

Bei zwei dreikomponentigen Vektoren ergibt das Dyadenprodukt eine 3×3 -Matrix:

$$\boxed{\text{Dyaden-Def}} \tag{5.11}$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : |\vec{a}\rangle\langle\vec{b}| = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1\hat{b}_1 & \hat{a}_1\hat{b}_2 & \hat{a}_1\hat{b}_3 \\ \hat{a}_2\hat{b}_1 & \hat{a}_2\hat{b}_2 & \hat{a}_2\hat{b}_3 \\ \hat{a}_3\hat{b}_1 & \hat{a}_3\hat{b}_2 & \hat{a}_3\hat{b}_3 \end{pmatrix}$$

In der bisherigen Vektroanalysis gibt es ein Problem, wenn Zeilenvektoren und Spaltenvektoren nicht sorgfältig voneinander unterschieden werden:

$$\exists \vec{a} : \exists \vec{b} : \exists \vec{c} : \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$$

Diese vermeintliche Ungültigkeit der Assoziativität bezüglich des Skalarproduktes erübrigt sich unter Verwendung der Vektoren in Dirac-Notation:

$$\boxed{\text{Assoziativitaet-S}} \tag{5.12}$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : |\vec{a}\rangle(\langle\vec{b}|\vec{c}\rangle) = (|\vec{a}\rangle\langle\vec{b}|)\vec{c}$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird in den Klammern zuerst das Skalarprodukt $\langle\vec{b}|\vec{c}\rangle$ berechnet, auf der rechten Seite der Gleichung wird zuerst das dyadische Produkt $|\vec{a}\rangle\langle\vec{b}|$ berechnet.

Die Schwierigkeit in der herkömmlichen Notation liegt darin, dass die mathematische Vektor-Matrix-Struktur verloren geht und somit die operative Verknüpfung zwischen den ersten beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} nur dann als Dyadenprodukt erkannt werden kann, wenn man dafür innerhalb der herkömmlichen Notation ein neues Operatorsymbol benutzt.

In dieser Dirac–Notation sind wegen der Assoziativität von Matrizenprodukten beliebig lange Ketten von Vektoren möglich, die mittendrin wohldefinierte mathematische Strukturen, nämlich Skalare oder Matrizen, enthalten:

$$\boxed{\text{Vektorketten}} \quad (5.13)$$

- (1) $\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : \forall \vec{d} : \forall \vec{e} : \forall \vec{f} : \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \langle \vec{c} | \vec{d} \rangle \langle \vec{e} | \vec{f} \rangle$ ist ein Skalar
- (2) $\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : \forall \vec{d} : \forall \vec{e} : \forall \vec{f} : |\vec{a}\rangle \langle \vec{b} | \langle \vec{c} | \vec{d} \rangle \langle \vec{e} | \vec{f} \rangle$ ist eine Matrix
- (3) $\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : \forall \vec{d} : \forall \vec{e} : |\vec{a}\rangle \langle \vec{b} | \langle \vec{c} | \vec{d} \rangle \langle \vec{e} |$ ist ein Spaltenvektor
- (4) $\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : \forall \vec{d} : \forall \vec{e} : \langle \vec{a} | \langle \vec{b} | \langle \vec{c} | \vec{d} \rangle \langle \vec{e} |$ ist ein Zeilenvektor

Wegen der Assoziativität von Matrixprodukten können die Operatoren zwischen den Enden der Vektorketten entweder als Skalare oder als Matrizen interpretiert werden. In der Rechenpraxis zeigt sich, dass Skalarprodukte und Dyadenprodukte in gleicher Häufigkeit vorkommen und einen gleichwertigen Beitrag zu den Gleichungen liefern.

5.8 Betragsquadrat

Das Betragsquadrat eines komplexen 3–dimensionalen Vektors \vec{a} wird wie folgt gebildet:

$$\boxed{\text{Betragsquadrat-Def}} \quad (5.14)$$

- (1) $\forall \vec{a} : |\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}^* | \vec{a} \rangle$
- (2) $\forall \vec{a} : |\vec{a}|^2 = \sum_{j=1}^3 \hat{a}_j^* \hat{a}_j$

Die Quadratwurzelfunktion kann dazu führen, dass ein Objekt entsteht, das nicht differentiell superkontinuierlich ist und nicht mehr Element unsere Menge der Skalarfelder im Sinne der Definition [\(3.11\)](#) ist:

$$\exists \vec{a} : |\vec{a}| \notin \mathbb{F}_{DV}$$

Zum Beispiel ist der Betrag des Ortsvektor \vec{x} im Nullpunkt nicht nach x_1, x_2, x_3 differenzierbar und deshalb nicht differentiell superkontinuierlich:

- (1) $\forall \vec{x}: |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$ herkömmlicher Betrag eines Vektors
- (2) $\forall \vec{x}: |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ Skalarprodukt [\(5.10\)](#)
- (3) $|\vec{x}| \notin \mathbb{F}_{DV}$ vgl. Definition [\(3.11\)](#)

Wenn nach der Anwendung einer Operation ein nicht differentiell superkontinuierliches Objekt entstanden ist, darf kein Differentialoperator mehr auf ein solches Objekt angewendet werden!

5.9 Vektorkomponenten

Die Vektorkomponenten lassen sich durch Skalarprodukte mit den Einheitsvektoren extrahieren:

$$\boxed{\text{Vektorkomponenten-Abl}} \tag{5.15}$$

- (1) $\forall \vec{a}: \forall \check{j}: \hat{a}_{\check{j}} = \langle \vec{e}_{\check{j}} | \vec{a} \rangle$ Definitionen [\(5.3\)](#), [\(5.8\)](#), [\(5.10\)](#)
- (2) $\forall \vec{a}: \forall \check{j}: \hat{a}_{\check{j}} = \langle \vec{a} | \vec{e}_{\check{j}} \rangle$ Definitionen [\(5.2\)](#), [\(5.8\)](#), [\(5.10\)](#)

5.10 Matrizen

Matrizen werden mit einem Unterstrich unter einem Buchstaben gekennzeichnet:

$$\boxed{\text{Matrix-Def}} \tag{5.16}$$

- (1) $\forall \hat{a}: \sim (\underline{\hat{a}} \in \mathbb{S}_{DV}^{3,3} \iff \hat{a} \in \mathbb{M}_{DV}^{3,3})$ Matrixobjekt bzw. Matrixoperator

- (2) $\forall \hat{a}: \underline{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} & \hat{a}_{1,2} & \hat{a}_{1,3} \\ \hat{a}_{2,1} & \hat{a}_{2,2} & \hat{a}_{2,3} \\ \hat{a}_{3,1} & \hat{a}_{3,2} & \hat{a}_{3,3} \end{pmatrix}$ Komponentendarstellung

5.11 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix wird mit dem Symbol \underline{e} bezeichnet:

$$\boxed{\text{e-Def}} \quad (5.17)$$
$$\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.12 Kronecker-Delta

Für alle natürlichen Zahlen j, k wird das Kroneckersymbol definiert:

$$\boxed{\text{Kronecker-Def}} \quad (5.18)$$
$$\forall j : \forall k : \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & : j = k \\ 0 & : j \neq k \end{cases}$$

Wenn wir die Indizes per Voraussetzung auf die drei Koordinatenindizes beschränken, erhalten wir eine Beziehung zu den Skalarprodukten der Einheitsvektoren:

$$\begin{array}{l} (1.1) \quad \{j, k\} \subset \{1, 2, 3\} \quad \text{Voraussetzung (Phantasie)} \\ \hline (1.100) \quad \delta_{j,k} = \langle \vec{e}_j | \vec{e}_k \rangle \quad \text{Definitionen (5.8), (5.10), (5.18)} \end{array}$$

Mit Hilfe der Phantasierregel kann dann der folgende Satz erzeugt werden:

$$(2) \quad \forall j : \forall k : \{j, k\} \subset \{1, 2, 3\} \implies \delta_{j,k} = \langle \vec{e}_j | \vec{e}_k \rangle \quad \text{Phantasierregel}$$

Mit der Definition der Komponentenindizes (3.5) gilt nach der Abtrennungsregel der folgende Satz, da die Komponentenindizes bereits per Definition auf die Menge $\{1, 2, 3\}$ beschränkt sind:

$$(3) \quad \forall \check{j} : \forall \check{k} : \delta_{\check{j}, \check{k}} = \langle \vec{e}_{\check{j}} | \vec{e}_{\check{k}} \rangle \quad \text{Definitionen (5.8), (5.10), (5.18)}$$

5.13 Einheitsteilmatrix

Wir definieren den neuen Begriff der Einheitsteilmatrix mit genau einer Komponente mit der Zahl 1 auf der Hauptdiagonalen, wobei alle anderen Komponenten 0 sind und führen ein neues Symbol dafür ein:

$$\boxed{\text{Einheitsteilmatrizen-Def}} \quad (5.19)$$

$$\forall \check{j} : \underline{e}_{\check{j}} = |\vec{e}_{\check{j}}\rangle\langle\vec{e}_{\check{j}}|$$

Die konkreten Einheitsteilmatrizen sind:

$$\boxed{\text{Einheitsteilmatrizen-S}} \quad (5.20)$$

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.14 Matrixkomponente

Um eine Matrixkomponente einer Matrix \hat{a} zu erhalten, definieren wir einen neuen Operator, der ein Skalar liefert:

$$\boxed{\text{MatrixKomp-Def}} \quad (5.21)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \check{j} : \forall \check{k} : \diamond_{\check{j}, \check{k}} \hat{a} = \langle \vec{e}_{\check{j}} | \hat{a} | \vec{e}_{\check{k}} \rangle$$

5.15 Einkomponentenmatrix

Eine Einkomponentenmatrix, die nur aus genau einer bestimmten Komponente einer Matrix \hat{a} besteht, definieren wir wie folgt:

$$\boxed{\text{Einkomponentenmatrix-Def}} \quad (5.22)$$

$$\forall \hat{a} : \forall j : \forall k : \square_{j,k} \hat{a} = e_j \hat{a} e_k$$

5.16 Matrizenaddition

Die Addition zweier Matrizen wird durch die Addition der jeweils korrespondierenden Komponenten durchgeführt:

$$\boxed{\text{Matrizen-Addition-Def}} \quad (5.23)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \hat{a} + \hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} + \hat{b}_{1,1} & \hat{a}_{1,2} + \hat{b}_{1,2} & \hat{a}_{1,3} + \hat{b}_{1,3} \\ \hat{a}_{2,1} + \hat{b}_{2,1} & \hat{a}_{2,2} + \hat{b}_{2,2} & \hat{a}_{2,3} + \hat{b}_{2,3} \\ \hat{a}_{3,1} + \hat{b}_{3,1} & \hat{a}_{3,2} + \hat{b}_{3,2} & \hat{a}_{3,3} + \hat{b}_{3,3} \end{pmatrix}$$

5.17 Zeilen und Spalten einer Matrix

Eine Matrix kann auch entweder als ein Tripel von Zeilenvektoren oder als ein Tripel von Spaltenvektoren interpretiert werden. Dazu definieren wir erst einmal die Zeilenvektoren und die Spaltenvektoren einer Matrix:

$$\boxed{\text{Matrix-Vektortripel-Def}} \quad (5.24)$$

$$(1) \quad \forall \hat{a} : \forall \check{n} \quad \langle \hat{a}, R_{\check{n}} | = \sum_{j=1}^3 \hat{a}_{\check{n},j} \langle \vec{e}_j | \quad \text{Zeilenvektor } \check{n}$$

$$(2) \quad \forall \hat{a} : \forall \check{n} \quad | \hat{a}, C_{\check{n}} \rangle = \sum_{j=1}^3 | \vec{e}_j \rangle \hat{a}_{j,\check{n}} \quad \text{Spaltenvektor } \check{n}$$

Der zweite symbolische Parameter $R_{\check{n}}$ bzw. $C_{\check{n}}$ ist notwendig, um zwischen den Zeilenkomponenten und den Spaltenkomponenten der Matrix zu unterscheiden, denn es gilt nur bei symmetrischen Matrizen die Identität der Komponenten eines Zeilenvektors mit den Komponenten des entsprechenden

Spaltenvektors gleicher Nummer:

$$\boxed{\text{SymmetrieImplikation-S}} \quad (5.25)$$

$$\forall \underline{\hat{a}} : \forall \underline{\hat{n}} : \underline{\hat{a}}^T = \underline{\hat{a}} \implies \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_{\hat{n}} \rangle^T = |\underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_{\hat{n}}\rangle$$

Mit Hilfe der Zeilenvektoren und Spaltenvektoren können die Matrizen als entsprechende geordnete Vektortripel dargestellt werden:

$$\boxed{\text{Matrix-Vektortripel-S}} \quad (5.26)$$

$$(1) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \underline{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \underline{\hat{a}} = (|\underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_1\rangle, |\underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_2\rangle, |\underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_3\rangle)$$

5.18 Matrizenmultiplikation

Die Matrizenmultiplikation kann jetzt mit dem Begriff des Skalarproduktes aus den Zeilenvektoren und den Spaltenvektoren zweier Matrizen definiert werden:

$$\boxed{\text{MatrizenMul-Def}} \quad (5.27)$$

$$\forall \underline{\hat{a}} : \forall \underline{\hat{b}} : \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_1 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_1 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_1 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_2 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_1 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_3 \rangle \\ \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_2 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_1 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_2 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_2 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_2 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_3 \rangle \\ \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_3 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_1 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_3 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_2 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_3 | \underline{\hat{b}}, \mathbf{C}_3 \rangle \end{pmatrix}$$

5.19 Multiplikation von Matrizen mit Vektoren

Ein Zeilenvektor darf nur links neben einer Matrix und ein Spaltenvektor darf nur rechts neben einer Matrix stehen:

$$\boxed{\text{Matrix-und-Vektor-Def}} \quad (5.28)$$

$$(1) \quad \forall \vec{a} : \forall \underline{\hat{b}} : \langle \vec{a} | \underline{\hat{b}} = (\langle \vec{a} | \underline{\hat{b}}, C_1 \rangle, \langle \vec{a} | \underline{\hat{b}}, C_2 \rangle, \langle \vec{a} | \underline{\hat{b}}, C_3 \rangle) \quad \text{Zeilenvektor}$$

$$(2) \quad \forall \vec{a} : \forall \underline{\hat{b}} : \underline{\hat{b}} | \vec{a} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\hat{b}}, R_1 | \vec{a} \rangle \\ \langle \underline{\hat{b}}, R_2 | \vec{a} \rangle \\ \langle \underline{\hat{b}}, R_3 | \vec{a} \rangle \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektor}$$

5.20 Diagonalskalarmatrix

Jede 3×3 -Matrix \hat{a} kann als eine Summe von dyadischen Produkten geschrieben werden:

$$\boxed{\text{Matrix-Dyadensumme-S}} \quad (5.29)$$

$$\forall \hat{a} : \hat{a} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 |\vec{e}_j\rangle \hat{a}_{j,k} \langle \vec{e}_k|$$

Nach unserem Dirac-Formalismus ist es nicht erlaubt, ein Skalar an die Strichseite eines Vektors zu setzen; er muss immer an die Spitze eines Vektors geschrieben werden. Wegen der möglichen Dyadendarstellung einer Matrix ist es nicht erlaubt, ein Skalar direkt links oder rechts neben einer Matrix zu setzen. Wir benötigen deshalb eine Spezialdefinition für die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix. Dazu wird aus dem Skalar eine Matrix erzeugt, die nur in den Hauptdiagonaleinträgen das Skalar \hat{u} enthält:

$$\boxed{\text{Diagonalskalarmatrix-Def}} \quad (5.30)$$

$$\forall \hat{u} : [\hat{u}] = \sum_{j=1}^3 |\vec{e}_j\rangle \hat{u} \langle \vec{e}_j|$$

Die Darstellung mit den einzelnen Komponenten ist:

$$\boxed{\text{Diagonalskalarmatrix-S}} \quad (5.31)$$

$$\forall \hat{u} : [\hat{u}] = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix}$$

Nun ist es auch möglich, einen Skalaroperator \mathcal{U} formal korrekt auf einen Spaltenvektor $|\vec{a}\rangle$ wirken zu lassen, indem aus ihm nach dieser Vorschrift eine Diagonalmatrix erzeugt wird. Wir erhalten damit den Operator $[\mathcal{U}]|\vec{a}\rangle$ bzw. das Objekt $\{[\mathcal{U}]|\vec{a}\rangle\}$.

Als Spezialfall ist $[1] = \underline{e}$ die Einismatrix.

Die Multiplikation eines Skalaroperators \mathcal{U} zur Matrix \underline{a} erfolgt durch $\underline{a} [\mathcal{U}]$ bzw. $[\mathcal{U}] \underline{a}$, je nachdem ob der Operator auf die Matrixkomponenten wirken soll oder nicht.

5.21 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Die Vektorproduktmatrix bezüglich eines dreikomponentigen Vektors \vec{a} wird wie folgt definiert:

$$\boxed{\text{Vektorproduktmatrix-Def}} \quad (5.32)$$

$$\forall \vec{a} : [\vec{a} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{a}_3 & \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 & 0 & -\hat{a}_1 \\ -\hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorproduktmatrix ist antisymmetrisch:

$$\boxed{\text{Antisymmetrie-S}} \quad (5.33)$$

$$\forall \vec{a} : [\vec{a} \times]^T = -[\vec{a} \times]$$

Im Allgemeinen sind die Komponenten zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} untereinander paarweise nicht kommutativ.

Die Anwendung der aus den Komponenten des Vektors \vec{a} gebildete Vektorproduktmatrix auf den Vektor \vec{b} als Spaltenvektor ergibt:

$$\boxed{\text{a-Kreuz-b-S}} \tag{5.34}$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : [\vec{a} \times] |\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \hat{b}_3 - \hat{a}_3 \hat{b}_2 \\ \hat{a}_3 \hat{b}_1 - \hat{a}_1 \hat{b}_3 \\ \hat{a}_1 \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \hat{b}_1 \end{pmatrix}$$

Soll das Ergebnis ein Zeilenvektor sein, so muss die Kreuzproduktmatrix aus den Komponenten des Vektors \vec{b} gebildet werden, und der Vektor \vec{a} muss als Zeilenvektor auf diese Matrix wirken:

$$\boxed{\text{a-b-Kreuz-S}} \tag{5.35}$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \langle \vec{a} | [\vec{b} \times] = (\hat{a}_2 \hat{b}_3 - \hat{a}_3 \hat{b}_2, \hat{a}_3 \hat{b}_1 - \hat{a}_1 \hat{b}_3, \hat{a}_1 \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \hat{b}_1)$$

Damit erhalten wir die folgende Beziehung für alle Vektorenpaare, auch wenn deren Komponenten paarweise nicht kommutativ sind:

$$\boxed{\text{a-Kreuz-b-Trp-S}} \tag{5.36}$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : [\vec{a} \times] |\vec{b}\rangle = \left(\langle \vec{a} | [\vec{b} \times] \right)^T$$

5.21.1 Antikommutativität

Durch die Definition der Kreuzproduktmatrix ergibt sich eine gewisse Antikommutativität bei Vertauschung der Vektoren \vec{a} und \vec{b} , falls jede Komponente des einen Vektors mit jeder Komponente des anderen Vektors kommutativ ist:

	(1.1) $\forall j : \forall k : \hat{a}_j \hat{b}_k = \hat{b}_k \hat{a}_j$	Voraussetzung: Kommutativität
(1.100)	$[\vec{a} \times] \vec{b}\rangle = - [\vec{b} \times] \vec{a}\rangle$	Folgerung

$$\boxed{\text{AntikommutativitaetImplikation-S}} \quad (5.37)$$

$$\forall j: \forall k: \hat{a}_j \hat{b}_k = \hat{b}_k \hat{a}_j \implies [\vec{a} \times] |\vec{b}\rangle = -[\vec{b} \times] |\vec{a}\rangle \quad \text{Phantasierregel}$$

Wenn wir statt der allgemeinen Vektorsymbole \vec{a}, \vec{b} die Vektorobjekte \vec{a}, \vec{b} betrachten, dann gilt die Antikommutativität wegen der Kommutativität von zwei beliebigen Skalarobjekten allgemein:

$$\boxed{\text{Antikommutativitaet-S}} \quad (5.38)$$

$$\forall \vec{a}: \forall \vec{b}: [\vec{a} \times] |\vec{b}\rangle = -[\vec{b} \times] |\vec{a}\rangle$$

5.22 Spur einer Matrix

Die Spur einer quadratischen Matrix \hat{a} wird wie folgt definiert:

$$\boxed{\text{Spur-Def}} \quad (5.39)$$

$$\forall \hat{a}: \text{trace } \hat{a} = \sum_{j=1}^3 \langle \vec{e}_j | \hat{a} | \vec{e}_j \rangle$$

5.23 Skalarmultiplikation mit Vektoren

Die Multiplikation eines Spaltenvektors mit einem Skalar und die Multiplikation eines Skalars mit einem Zeilenvektor wird in den folgenden beiden Axiomen definiert:

$$\boxed{\text{Vektor-Skalar-Mul-Def}} \quad (5.40)$$

$$(1) \quad \forall \vec{a} : \forall \hat{u} : |\vec{a}\rangle\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1\hat{u} \\ \hat{a}_2\hat{u} \\ \hat{a}_3\hat{u} \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \forall \vec{a} : \forall \hat{u} : \hat{u}\langle\vec{a}| = (\hat{u}\hat{a}_1, \hat{u}\hat{a}_2, \hat{u}\hat{a}_3)$$

Jedes Skalar kann durch ein Skalarprodukt dargestellt werden:

$$\boxed{\text{Skalar-Abt}} \quad (5.41)$$

$$(1) \quad \forall \hat{u} : \exists \vec{a} : \exists \vec{b} : \hat{u} = \sum_{j=1}^3 \hat{a}_j \hat{b}_j$$

$$(2) \quad \forall \hat{u} : \exists \vec{a} : \exists \vec{b} : \hat{u} = \langle\vec{a}|\vec{b}\rangle \quad \text{Skalarprodukt (5.10)}$$

Wenn wir beispielsweise das Skalar mit $\hat{u} = \langle\vec{b}|\vec{c}\rangle$ wählen, dann erhalten wir:

$$\forall \vec{b} : \forall \vec{c} : \forall \hat{u} : \hat{u} = \langle\vec{b}|\vec{c}\rangle$$

$$\implies$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : |\vec{a}\rangle\hat{u} = |\vec{a}\rangle\langle\vec{b}|\vec{c}\rangle$$

Wegen der Assoziativität von Matrizenprodukten kann entweder das Skalarprodukt $\langle\vec{b}|\vec{c}\rangle$ oder das dyadische Produkt $|\vec{a}\rangle\langle\vec{b}|$ zuerst berechnet werden. Hätten wir \hat{u} vor den Spaltenvektor gesetzt, würden wir die zweite Möglichkeit optisch nicht sofort erkennen. Das gleiche gilt für Zeilenvektoren entsprechend:

$$\forall \vec{b} : \forall \vec{c} : \forall \hat{u} : \hat{u} = \langle \vec{b} | \vec{c} \rangle$$

$$\implies$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : \hat{u} \langle \vec{a} | = \langle \vec{b} | \vec{c} \rangle \langle \vec{a} |$$

Hier darf das Skalar nicht hinter dem Zeilenvektor stehen. Deshalb soll eine Grundregel für die Konstellationen von Dirac-Vektoren lauten:

Vektoren dürfen nur entweder Spitze an Spitze oder Strich an Strich gesetzt werden.

5.24 Skalierete Kreuzproduktmatrizen und Vektoren

Den Zusammenhang zwischen skalierten Kreuzproduktmatrizen und skalierten Vektoren beschreiben die folgenden zwei Axiome:

$$\boxed{\text{Mat-Vek-skaliert-Def}} \quad (5.42)$$

$$(1) \quad \forall \vec{a} : \forall \hat{u} : \left[\vec{b} \times \right] = \left[\vec{a} \times \right] [\hat{u}] \iff \forall \vec{a} : \forall \hat{u} : |\vec{b}\rangle = |\vec{a}\rangle \hat{u}$$

$$(2) \quad \forall \vec{a} : \forall \hat{u} : \left[\vec{b} \times \right] = [\hat{u}] \left[\vec{a} \times \right] \iff \forall \vec{a} : \forall \hat{u} : \langle \vec{b} | = \hat{u} \langle \vec{a} |$$

5.25 Konstellationen

Skalare \hat{u}, \hat{v} , Vektoren \vec{a}, \vec{b} und Matrizen \hat{c}, \hat{d} sollen nur in folgenden Konstellationen erlaubt sein, um wohlgeformte Terme zu bilden:

Skalare	:	$\hat{u} \hat{v}$	$\langle \vec{a} \vec{b} \rangle$
Matrizen	:	$\hat{c} \hat{d}$	$ \vec{a}\rangle \langle \vec{b} $
Zeilenvektoren	:	$\hat{u} \langle \vec{a} $	$\langle \vec{a} \hat{c}$
Spaltenvektoren	:	$ \vec{a}\rangle \hat{u}$	$\hat{c} \vec{a}\rangle$

5.26 Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen

Wenden wir die Vektorproduktmatrixdefinition (5.32) auf die drei Einheitsvektoren an, so erhalten wir nach der Spezialisierungsregel Matrizen, die wir als Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen bezeichnen können:

$$\boxed{\text{e-Kreuz-S}} \quad (5.43)$$

$$[\vec{e}_1 \times] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge [\vec{e}_2 \times] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge [\vec{e}_3 \times] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese drei Matrizen stellen eine Basis für alle Kreuzproduktmatrizen dar. Mit drei zyklischen Indizes $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$ nach Definition (3.6) ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\boxed{\text{en1en2en3-S}} \quad (5.44)$$

$$\forall \hat{n}_1 : \forall \hat{n}_2 : \forall \hat{n}_3 : [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times]^T [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times] = [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times] [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times]^T = |\vec{e}_{\hat{n}_2} \rangle \langle \vec{e}_{\hat{n}_2}| + |\vec{e}_{\hat{n}_3} \rangle \langle \vec{e}_{\hat{n}_3}|$$

Die konkreten Matrizen sind:

e1e2e3-S

(5.45)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad [\vec{e}_1 \times]^T [\vec{e}_1 \times] &= [\vec{e}_1 \times] [\vec{e}_1 \times]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (2) \quad [\vec{e}_2 \times]^T [\vec{e}_2 \times] &= [\vec{e}_2 \times] [\vec{e}_2 \times]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (3) \quad [\vec{e}_3 \times]^T [\vec{e}_3 \times] &= [\vec{e}_3 \times] [\vec{e}_3 \times]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Bei einem Produkt zweier unterschiedlichen Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen folgt:

en1en2-S

(5.46)

$$\forall \hat{n}_1 : \forall \hat{n}_2 : [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times] [\vec{e}_{\hat{n}_2} \times] = |\vec{e}_{\hat{n}_2} \rangle \langle \vec{e}_{\hat{n}_1} |$$

Die konkreten Matrizen enthalten jeweils nur eine Komponente:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{e12e23e31-S}} \qquad (5.47) \\
 (1) \quad [\vec{e}_1 \times] [\vec{e}_2 \times] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (2) \quad [\vec{e}_2 \times] [\vec{e}_3 \times] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 (3) \quad [\vec{e}_3 \times] [\vec{e}_1 \times] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Eine weitere Beziehung ist:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{Summe-ejej-S}} \qquad (5.48) \\
 \sum_{j=1}^3 [\vec{e}_j \times]^T [\vec{e}_j \times] = [2] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Die Spuren der folgenden Matrizenprodukte rechtfertigen die Bezeichnung der Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen als eine Basis zu allen Kreuzproduktmatrizen:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{trace-en1en2-S}} \qquad (5.49) \\
 (1) \quad \forall \hat{n}_1 : \quad \text{trace} [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times]^T [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times] = 2 \\
 (2) \quad \forall \hat{n}_1 : \forall \hat{n}_2 : \quad \text{trace} [\vec{e}_{\hat{n}_1} \times] [\vec{e}_{\hat{n}_2} \times] = 0
 \end{array}$$

5.27 Basiszerlegung von Vektorproduktmatrizen

Wenn \vec{a} ein Vektor ist, kann die dazugehörige Kreuzproduktmatrix $[\vec{a}\times]$ mit den zyklischen Indizes $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$ und den Einheitsteilmatrizen von (5.20) in eine dazu gehörende Basis zerlegt werden:

$$\boxed{\text{Kreuzproduktbasis-Def}} \quad (5.50)$$

$$\forall \hat{n}_1 : \forall \hat{n}_2 : \forall \hat{n}_3 : \forall \vec{a} : [\vec{a}_{\hat{n}_1}\times] = e_{-\hat{n}_2} [\vec{a}\times] e_{\hat{n}_3} + e_{-\hat{n}_3} [\vec{a}\times] e_{-\hat{n}_2}$$

Die konkreten Matrizen sind:

$$\boxed{\text{aKreuz-Basis-S}} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \forall \vec{a} : [\vec{a}_1\times] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{a}_1 \\ 0 & \hat{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \\ (2) \quad \forall \vec{a} : [\vec{a}_2\times] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (3) \quad \forall \vec{a} : [\vec{a}_3\times] &= \begin{pmatrix} 0 & -\hat{a}_3 & 0 \\ \hat{a}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.28 Drehmatrizen

Die drei Drehmatrizen für aktive Drehungen um die Achse \vec{e}_n um den Winkel φ lauten:

$$\begin{array}{l} \text{aktive-Drehmatrizen-Def} \\ (1) \quad \forall \varphi : \odot_{1,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \vec{e}_1\text{-Achse} \\ (2) \quad \forall \varphi : \odot_{2,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \vec{e}_2\text{-Achse} \\ (3) \quad \forall \varphi : \odot_{3,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \vec{e}_3\text{-Achse} \end{array} \quad (5.52)$$

5.29 Drehmatrizen und Vektorproduktmatrizen

Wenn wir den speziellen Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wählen, erhalten wir die folgenden speziellen Drehmatrizen:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{piHalbe-Drehmatrizen-S}} \qquad (5.53) \\
 (1) \quad \odot_{1, \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 (2) \quad \odot_{2, \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (3) \quad \odot_{3, \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Ein Blick auf die Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen (5.43) und die Einheitsteilmatrizen (5.20) zeigt die Beziehungen zu den speziellen Drehmatrizen unter Verwendung des Komponentenindex \check{n} :

$$\boxed{\text{piHalbe-Drehmatrizen-en1-S}} \qquad (5.54) \\
 \forall \check{n} : \odot_{\check{n}, \frac{\pi}{2}} = [\vec{e}_{\check{n}} \times] + \underline{e}_{\check{n}}$$

Kapitel 6

Spezielle Operatoren

6.1 Differentialableitungsoperatoren

6.1.1 Globales Differential: Steigungsfunktion

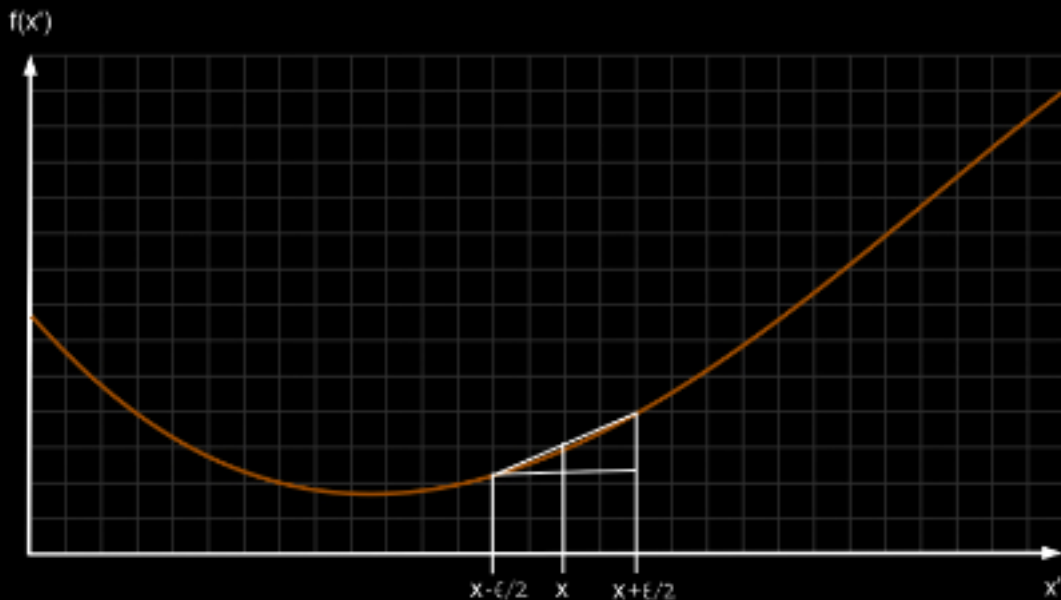
Zunächst definieren wir mit unserem globalen Symbolvorrat die Wirkungsweise eines Differentialableitungsoperators:

$$\boxed{\text{globales-Differential-Def}} \quad (6.1)$$
$$\forall f : \forall x : \{\partial_x f\} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(f\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - f\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \right\}$$

Dieser Operator ∂_x formt eine Funktion formal so um, dass die abgeleitete Funktion entsteht. Die bisher übliche Definition ist unsymmetrisch in der Umgebung von x :

$$\frac{dx}{df} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (f(x + \varepsilon) - f(x))$$

Die eigene Definition [\(6.1\)](#) lässt sich wegen der symmetrischen Definition um den Punkt x besser auf numerische Maschinen anwenden, da der entsprechende Differenzenquotient gleichmäßiger zu beiden Seiten vom Punkt x abweicht:



6.1.2 Lokales Differential: Örtliche Steigung

Um die Differentialableitung an einem festen Punkt x' ausdrücken zu können, führen wir einen weiteren Operator mit zwei Parametern ein, der zum Einen die formale Differentialableitung einer Funktion nach der Variablen x bildet und zum Anderen anschließend einen festen Punkt x' einsetzt:

lokales-Differential-Def

(6.2)

$$\forall f : \forall x' : \forall x : \{ \partial_{x,x'} f \} = \{ \partial_x f \} (x')$$

Die bisher übliche Schreibweise wird verworfen, da nicht explizit erkennbar ist, nach welcher Variable abgeleitet werden soll:

$$f^{(n)}(x') \text{ und } f'(x') \quad \text{Ableitung nach welcher Variable?}$$

Die Anwendung des Differentialoperators ∂_x auf eine Funktion f ergibt beispielsweise wegen der Produktregel:

Produktregel-S

(6.3)

$$\forall f : \forall x : \partial_x f = \{ \partial_x f \} + f \partial_x$$

Hierbei spaltet sich der Operator in zwei Terme auf, wobei der erste Term ein Objekt und der zweite Term ein Operator ist. Bei Anwendung auf ein weiteres Objekt wird der erste Term nach dem Axiom (4.9) Zeile 1 zu einem Multiplikationsoperator. Wenn wir diese Gleichung umstellen, erhalten wir eine allgemeine Kommutatorrelation für den Differentialoperator mit einem Objekt f :

$$\boxed{\text{DiffOpKommutatorRelation-S}} \quad (6.4)$$

$$\forall f : \forall x : \partial_x f - f \partial_x = \{ \partial_x f \}$$

6.1.3 Taylorentwicklungsoperator

Der Taylorentwicklungsoperator kann bezüglich einer Funktion f mit der Variablen x und des Entwicklungspunktes x' wie folgt definiert werden:

$$\boxed{\text{Taylorentwicklung-Def}} \quad (6.5)$$

$$\forall f : \forall x' : \forall x : \{ \mathcal{T}_{x,x'} f \} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - x')^n \{ \partial_{x,x'}^n f \} \right\}$$

Der erste Index des Operators $\mathcal{T}_{x,x'}$ kennzeichnet die betreffende Variable der Funktion, der zweite Index kennzeichnet den Entwicklungspunkt bezüglich dieser Variable.

6.1.4 Zeitentwicklungsoperator

Wenn x aus der Definition der Taylorentwicklung (6.5) als eine Zeitvariable t interpretiert wird, dann erhalten wir einen Zeitentwicklungsoperator:

$$\boxed{\text{Zeitentwicklungsoperator-S}} \quad (6.6)$$

$$\forall f : \forall t' : \forall t : \{ \mathcal{T}_{t,t'} f \} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t - t')^n \{ \partial_{t,t'}^n f \} \right\}$$

6.1.5 Ortsentwicklungsoperator

Wenn x aus der Definition der Taylorentwicklung (6.5) als eine Ortsvariable $x_{\check{m}}$ interpretiert wird, dann erhalten wir einen Ortsentwicklungsoperator:

$$\boxed{\text{Ortsentwicklungsoperator-S}} \quad (6.7)$$

$$\forall \check{m} : \forall f : \forall x'_{\check{m}} : \forall x_{\check{m}} : \left\{ \mathcal{T}_{x_{\check{m}}, x'_{\check{m}}} f \right\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x_{\check{m}} - x'_{\check{m}})^n \left\{ \partial_{x_{\check{m}}, x'_{\check{m}}}^n f \right\} \right\}$$

6.2 Integraloperatoren

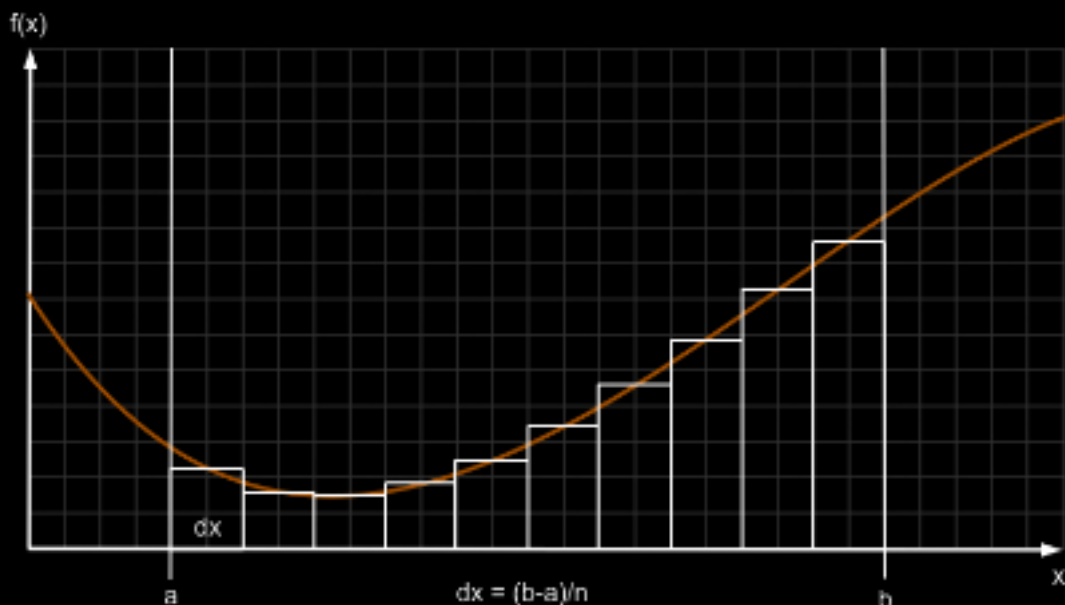
6.2.1 Lokales Integral: Fläche

Ein lokales Integral ist ein „bestimmtes Integral“, also eine konkrete Fläche innerhalb eines konkreten Intervalls:

$$\boxed{\text{lokales-Integral-Def}} \quad (6.8)$$

$$\forall f : \forall a : \forall b : \left\{ \int_a^b dx f \right\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \left(a + \left(\frac{1}{2} + j \right) \frac{b-a}{n} \right) \right\}$$

Dieser Ansatz liefert einen speziellen Mittelwert zwischen Obersumme und Untersumme:



6.2.2 Globales Integral: Stammfunktion

Ein globales Integral ist ein „*unbestimmtes Integral*“, also eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f . In diesem Operator werden die Integrationsvariable x und zusätzlich die Anfangsbedingung y_0 für den Punkt Null angegeben:

$$\boxed{\text{globales-Integral-Def}} \quad (6.9)$$

$$\forall y_0 : \forall f : \forall x : \{ \mathcal{F}_{y_0}(x) f \} = \left\{ \int_0^x dx' f(x') \right\} + y_0 \wedge y_0 = \{ \mathcal{F}_0(x) f \} (0)$$

Dieser Stammfunktionsoperator liefert ein Integral mit den speziellen Grenzen 0 und x , wobei auf der rechten Seite die lokale Integrationsvariable x' eingeführt worden ist. Die physikalische Einheit des Anfangswertes y_0 ist um eine Potenz der Einheit der Integrationsvariable x größer.

Der Allquantor zum Anfangswert y_0 bedeutet, dass bei jedem beliebig gewählten Anfangswert y_0 der Term auf der rechten Seite eine Stammfunktion der Funktion f darstellt. Bei Anwendung der Spezialisierungsregel erhalten wir das „*unbestimmte Integral*“ in gewohnter Form, wenn wir für y_0 den speziellen Wert 0 einsetzen:

$$\boxed{\text{unbestimmtes-Integral-S}} \quad (6.10)$$

$$\forall f : \forall x : \{ \mathcal{F}_0(x) f \} = \left\{ \int_0^x dx' f(x') \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Spezialisierung} \\ \text{des} \\ \text{Anfangswertes } y_0 \text{ der Defi-} \\ \text{nition } \underline{(6.9)} \end{array}$$

Mit Hilfe des Stammfunktionsoperators kann ein lokales Integral nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wie folgt ausgedrückt werden, da sich der Anfangswert y_0 aufhebt:

$$\boxed{\text{HDI-S}} \quad (6.11)$$

$$\forall y_0 : \forall f : \forall a : \forall b : \left\{ \int_a^b dx f \right\} = \{ \mathcal{F}_{y_0}(x) f \} (b) - \{ \mathcal{F}_{y_0}(x) f \} (a)$$

6.2.3 Flächenintegral

Das Flächenintegral eines ebenen Rechteckes mit diagonal gegenüberliegenden Punkten (a_1, a_2) und (b_1, b_2) ist

$$\boxed{\text{Flächenintegral-Def}} \quad (6.12)$$
$$\forall f : \forall (a_1, a_2) : \forall (b_1, b_2) : \left\{ \int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} d^2x \right\} = \left\{ \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f \right\}$$

6.2.4 Volumenintegral

Das Volumenintegral wird über das Volumen eines Quaders mit den raumdiagonal gegenüberliegenden Eckpunkten \vec{a} und \vec{b} ausgeführt:

$$\boxed{\text{Volumenintegral-Def}} \quad (6.13)$$
$$\forall f : \forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \left\{ \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d^3x f \right\} = \left\{ \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 f \right\}$$

6.3 Nabla-Operator

Der Nabla-Operator wird nun in die Dirac-Notation für dreidimensionale Vektoren in Form von Vektoroperatoren eingebettet:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{Nabla-Def}} \qquad \qquad \qquad (6.14) \\
 \\
 (1) \quad \forall \vec{x}: \quad \langle \vec{\nabla} | = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \qquad \text{Zeilenvektoroperator} \\
 \\
 (2) \quad \forall \vec{x}: \quad | \vec{\nabla} \rangle = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \qquad \text{Spaltenvektoroperator} \\
 \\
 (3) \quad \forall \vec{x}: \quad [\vec{\nabla} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_3} & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} & 0 & -\partial_{x_1} \\ -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Kreuzproduktmatrixoperator}
 \end{array}$$

6.4 Gradient

Der Gradient ist ein Operator, der aus einem Skalarobjekt $u(\vec{x})$ einen Spaltenvektor erzeugen kann, wenn der Nabla-Operator in Spaltenvektordarstellung auf die Funktion u wirkt:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{grad-Def}} \qquad \qquad \qquad (6.15) \\
 \\
 \forall \vec{x}: \quad | \text{grad} \rangle = | \vec{\nabla} \rangle
 \end{array}$$

6.5 Divergenz

Die Divergenz wird mit dem Nabla–Operator in Zeilenvektordarstellung definiert:

$$\boxed{\text{div-Def}} \quad (6.16)$$

$$\forall \vec{x}: \langle \text{div} | = \langle \vec{\nabla} |$$

Der Divergenzoperator wirkt auf einen Spaltenvektor als Operanden und liefert ein Skalar als Ergebnis.

6.6 Rotation

Die Rotation wird unter Verwendung der Kreuzproduktmatrixdarstellung definiert:

$$\boxed{\text{rot-Def}} \quad (6.17)$$

$$\forall \vec{x}: \underline{\text{rot}} = [\vec{\nabla} \times]$$

Der Rotationsoperator erwartet einen Spaltenvektor als Operand und hat als Ergebnis wieder einen Spaltenvektor.

6.7 Laplace–Operator

Der Laplace–Operator ergibt sich durch das Skalarprodukt des Nabla–Operators mit sich selbst:

$$\boxed{\text{Laplace-Def}} \quad (6.18)$$

$$\forall \vec{x}: \Delta = \langle \vec{\nabla} | \vec{\nabla} \rangle$$

6.8 Hesse–Matrix

Die Hesse–Matrix als Operator entsteht, indem der Nabla–Operator ein dyadisches Produkt mit sich selbst bildet:

$$\boxed{\text{Hesse-Matrix-Def}} \quad (6.19)$$

$$\forall \vec{x}: \quad \underline{\mathcal{H}} = |\vec{\nabla}\rangle\langle\vec{\nabla}|$$

6.9 Jacobi–Matrix

Die Jacobi–Matrix als Operator bezüglich eines Vektorobjektes \vec{a} ist das transponierte Dyadenprodukt aus dem Gradientenoperator mit dem Vektorobjekt \vec{a} in Zeilenvektordarstellung:

$$\boxed{\text{Jacobi-Matrix-Def}} \quad (6.20)$$

$$\forall \vec{a}: \forall \vec{x}: \quad \underline{\mathcal{J}}_{\vec{a}} = (|\vec{\nabla}\rangle\langle\vec{a}|)^T$$

6.10 Antidivergenz

Es wird ein Spaltenvektoroperator definiert, der Stammfunktionsoperatoren in jeder Komponente enthält und somit dem Divergenzoperator entgegenwirkt:

$$\boxed{\text{Anti-div-Def}} \quad (6.21)$$

$$\forall \vec{a}: \forall \vec{x}: \quad |\vec{\mathcal{F}}, \vec{a}\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_0(x_1) \\ \mathcal{F}_0(x_2) \\ \mathcal{F}_0(x_3) \end{pmatrix}$$

6.11 Antigradient

Es wird ein Zeilenvektoroperator definiert, der Stammfunktionsoperatoren in jeder Komponente enthält und somit dem Gradientenoperator entgegenwirkt:

$$\boxed{\text{Anti-grad-Def}} \quad (6.22)$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{x} : \langle \vec{F}, \vec{a} | = (\mathcal{F}_0(x_1), \mathcal{F}_0(x_2), \mathcal{F}_0(x_3))$$

6.12 Doppeltes Kreuzprodukt

Es seien \vec{a} und \vec{b} zwei beliebige Vektoren mit Komponenten, die im allgemeinen Komponenten nicht kommutativ sind. Unter Benutzung der Kreuzproduktmatrizen ergibt sich in einem doppelten Kreuzprodukt:

$$(1) \quad \forall \vec{a} : \forall \vec{b} : [\vec{a} \times] [\vec{b} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{a}_3 & \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 & 0 & -\hat{a}_1 \\ -\hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\hat{b}_3 & \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 & 0 & -\hat{b}_1 \\ -\hat{b}_2 & \hat{b}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Vektorproduktmatrix (5.32)}$$

$$(2) \quad \forall \vec{a} : \forall \vec{b} : [\vec{a} \times] [\vec{b} \times] = \begin{pmatrix} -\hat{a}_3 \hat{b}_3 - \hat{a}_2 \hat{b}_2 & \hat{a}_2 \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \hat{b}_1 \\ \hat{a}_1 \hat{b}_2 & -\hat{a}_3 \hat{b}_3 - \hat{a}_1 \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \hat{b}_3 & \hat{a}_2 \hat{b}_3 & -\hat{a}_2 \hat{b}_2 - \hat{a}_1 \hat{b}_1 \end{pmatrix} \quad \text{Matrizenprodukt (5.27)}$$

Durch Vergleich mit dem dyadischen Produkt und dem Skalarprodukt erkennen wir den folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{\text{xx-S}} \quad (6.23)$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : [\vec{a} \times] [\vec{b} \times] = \left(|\vec{a}\rangle \langle \vec{b}| \right)^T - \left[\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \right]$$

Für Ortsableitungen nach verschiedenen Variablen können wir diese Beziehung auch auf die doppelte Anwendung der Rotationsmatrix wie folgt übertragen und die Kommutativität der zweifachen gemischten Ableitungen ausnutzen, da die Variablen x_1, x_2, x_3 des Ortsvektors \vec{x} voneinander unabhängig sind:

$$\boxed{\text{rotrot-S}} \tag{6.24}$$

$$\forall \vec{x}: \underline{\text{rot rot}} = |\vec{\nabla}\rangle\langle\vec{\nabla}| - [\Delta]$$

Falls die Komponenten der drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ paarweise kommutativ sind, dann folgt der sogenannte Entwicklungssatz (bac–cab–Formel):

$$(1.1) \quad \forall \vec{a} : \vec{b} : \vec{c} : \hat{a}_{\hat{n}_1} \hat{b}_{\hat{n}_2} = \hat{b}_{\hat{n}_2} \hat{a}_{\hat{n}_1} \wedge \hat{b}_{\hat{n}_1} \hat{c}_{\hat{n}_2} = \hat{c}_{\hat{n}_2} \hat{b}_{\hat{n}_1} \wedge \hat{c}_{\hat{n}_1} \hat{a}_{\hat{n}_2} = \hat{a}_{\hat{n}_2} \hat{c}_{\hat{n}_1} \quad \text{Voraussetzung}$$

$$(1.100) \quad \forall \vec{a} : \vec{b} : \vec{c} : [\vec{a}\times][\vec{b}\times]|\vec{c}\rangle = |\vec{b}\rangle\langle\vec{a}|\vec{c}\rangle - |\vec{c}\rangle\langle\vec{a}|\vec{b}\rangle \quad \text{Gleichung (6.23) und Voraussetzung der Zeile 1.1}$$

Für drei beliebige Objekte erhalten wir in der obersten logischen Ebene diese Aussage, da alle Komponenten von Objekten nach den Objektaxiomen (4.9) Zeile 6 jeweils paarweise kommutativ sind:

$$\boxed{\text{bac-cab-S}} \tag{6.25}$$

$$\forall \vec{a} : \forall \vec{b} : \forall \vec{c} : [\vec{a}\times][\vec{b}\times]|\vec{c}\rangle = |\vec{b}\rangle\langle\vec{a}|\vec{c}\rangle - |\vec{c}\rangle\langle\vec{a}|\vec{b}\rangle$$

6.13 Nabla in Kugelkoordinaten?

Nach der herkömmlichen Definition hätte der Nabla–Operator in Kugelkoordinaten die folgende Darstellung:

$$\text{grad} = \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi$$

Der zweite und der dritte Term können aber Polstellen bei $r = 0$ und bei $\vartheta = 0$ erzeugen. Es können also Terme erzeugt werden, die nicht differentiell superkontinuierlich sind und infolgedessen der Axiomenkette (3.11), (3.12), (3.13), (4.3) widersprechen. Es muss daher innerhalb dieses Axiomensystems auf diese Form der Nabla–Darstellung in Kugelkoordinaten verzichtet werden!

6.14 Konstantenmengen

In physikalischen Ableitungen werden oft lange Listen von reellen Konstanten als Voraussetzungen benötigt. Um dies abzukürzen, definieren wir Mengen von Konstanten für die verschiedenen Strukturen:

$$\boxed{\text{K-Menge-Def}} \quad (6.26)$$

$$\mathbb{K}_{\text{DV}} = \{ \forall x: x \in \mathbb{R} \wedge \{|\text{grad}\rangle x\} = |\vec{0}\rangle \}$$

Häufig werden auch Konstanten benötigt, die größer als Null sind:

$$\boxed{\text{KPlus-Menge-Def}} \quad (6.27)$$

$$\mathbb{K}_{\text{DV}}^+ = \{ \forall x: x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge \{|\text{grad}\rangle x\} = |\vec{0}\rangle \}$$

Die nachfolgenden Axiome definieren verschiedene Konstantenstrukturen in Form von Skalaren, Vektoren und Matrizen:

Konstantenstrukturen

(6.28)

- (1) $\mathbb{K}_{\text{DV}}^{1,1} = \{ \forall x : x \in \mathbb{K}_{\text{DV}} \}$ Skalarkonstanten
- (2) $\mathbb{K}_{\text{DV}}^{1,3} = \{ \forall (x_1, x_2, x_3) : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{K}_{\text{DV}} \}$ Zeilenvektorkonstanten
- (3) $\mathbb{K}_{\text{DV}}^{3,1} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{K}_{\text{DV}} \right\}$ Spaltenvektorkonstanten
- (4) $\mathbb{K}_{\text{DV}}^{3,3} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} : \{x_{1,1}, \dots, x_{3,3}\} \subset \mathbb{K}_{\text{DV}} \right\}$ Matrixkonstanten

Per Definition gilt die folgende Äquivalenz der Mengenzugehörigkeit von Zeilenvektor- und Spaltenvektorkonstanten:

Konstantvektor-Äquivalenz-Def

(6.29)

$$\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle \in \mathbb{K}_{\text{DV}}^{3,1} \iff \langle \vec{a} | \in \mathbb{K}_{\text{DV}}^{1,3}$$

Index

- abstrakte Einheiten 22
- Antisymmetrie 52
- Antikommutativität 53
- Antidivergenz 71
- Antigradient 72
- Aussageform von Mengen 17

- Basiseinheiten 21
- Basissymbole 21
- Basiszerlegung von Vektorproduktmatrizen 60
- Beschränkte Funktionen 27
- bestimmtes Integral 66
- Betragsquadrat 45

- Definitionsbereiche 26
- Diagonalskalarmatrix 51
- Differentialableitungsoperatoren 63
- differentiell superkontinuierlich 5
- Dirac-Vektoren 39
- Divergenz 70
- doppeltes Kreuzprodukt 72
- Drehmatrizen 61
- dreidimensionaler Raum 5
- dyadisches Produkt 44

- Einheitsmatrix 47
- Einheitsteilmatrix 48
- Einheitsvektoren 42
- Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen 57
- Einkomponentenmatrix 49
- Entwicklungssatz („*bac-cab-Formel*“) 73

- Fläche 66
- Flächenintegral 68
- Funktionen 15
- Funktionsbegriff 5

- gerade Zahlen 28
- globale Basissymbole 21
- globales Integral 67
- Gradient 69

- Hesse-Matrix 71

- imaginäre Einheit 21
- Indizes 22
- Induktion 14
- inneres Produkt 43
- Integraloperatoren 66

- Jacobi-Matrix 71

- Kommutatorrelation Differentialableitung 65
- Komponentenindizes 22
- Konstanten 15
- Konstantenmengen 74
- Konstellationen (konkret) 56
- Kreuzprodukt 52
- Kronecker-Delta 47
- Kugelkoordinaten 73

- Längen 24
- Längeneinheit 21
- Laplace 70
- logische Grundfunktionen 6
- lokales Integral 66

- Matrixkomponente 48
- Matrixkomponenten 48
- Matrixspaltenvektoren 49
- Matrixzeilenvektoren 49
- Matrix-Vektor-Produkte 51
- Matrizen 46
- Matrizenaddition 49
- Matrizendimensionen 23
- Matrizenmultiplikation 50
- Mengen 17
 - Aussageform 17
 - Definitionsschema 18
 - differentiell superkontinuierliche Funktionen 24
- Mengendefinitinsschema 18
- Mengensymbole 23

- Nabla-Operator 69

- Objektaxiome 35
- Objekte 26
 - Operatoren und Objekte 31
- Objektsymbole 28
- örtliche Steigung 64
- Operatoren 27
 - Operatoren und Objekte 31
- Operatoraxiome 36
- Operatorsymbole 29
- Ortsentwicklungsoperator 66
- Ortsvektor 43

- Produkt einer Menge mit einer Einheit 24
- Produktregel 64

Quantorenlogik 7
 Funktionen und Quantoren 15
 Induktion 14
 Konstanten und Quantoren 15

Rotation 70

Skalarfelder 24
 skalierte Kreuzproduktmatrizen und Vektoren 56
 Skalarmultiplikation mit Matrizen 51
 Skalarmultiplikation mit Vektoren 55
 Skalarobjekte 25
 Skalarobjektsymbole 28
 Skalaroperatoren 25
 Skalaroperatorsymbole 29
 Skalarprodukt 43
 Spaltenindex 23
 Spaltenvektoren 40
 Spaltenvektoren einer Matrix 49
 Spur einer Matrix 54
 Stammfunktion 67
 Steigungsfunktion 63

Taylorentwicklungsoperator 65
 typenlose Vektoren 39

ungerade Zahlen 28

Vektoraddition 41
 Vektortypen 39
 Vektoren in Aufzählungslisten 42
 Vektorketten 45
 Vektorkomponenten 46
 Vektorprodukt 52
 Vektorproduktmatrizen–Basiszerlegung 60
 Volumenintegral 68

Wertebereiche 26
 Wirkungsbereiche von Operatoren 32

Zeilenindex 23
 Zeilenvektoren 40
 Zeilenvektoren einer Matrix 49
 Zeiteinheit 21
 Zeiten 24
 Zeitentwicklungsoperator 65
 zyklische Indizes 23